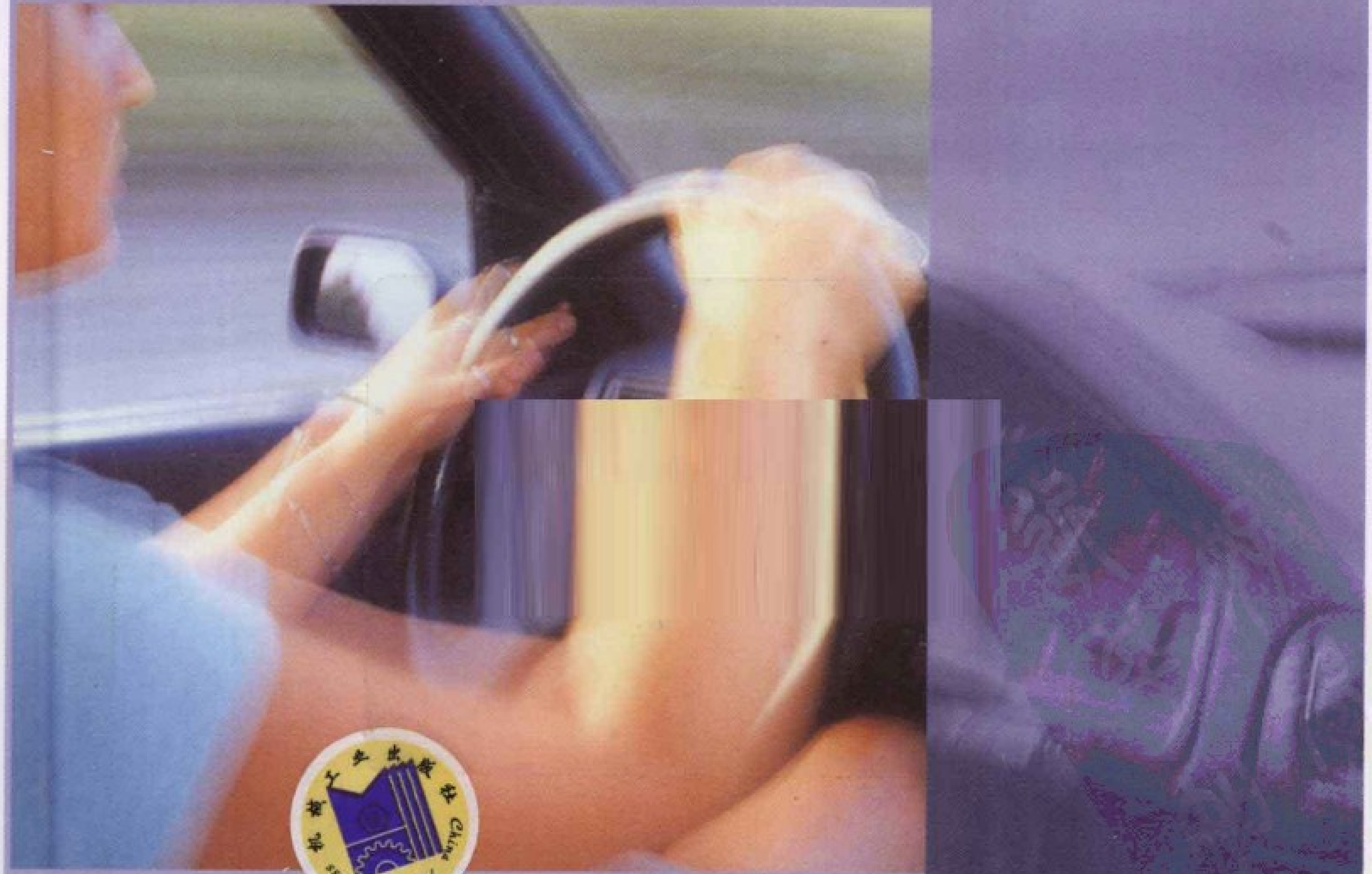
汽 / 车 / 先 / 进 / 技 / 术 / 译 / 丛

车辆操纵动力学

Vehicle Handling Dynamics

（日）Masato Abe 著
喻凡 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书特色：

◎从车辆动力学的角度，详尽地解释了车辆如何响应操纵指令，并对其响应方式进行了从理论到应用的完整分析和研究。

◎采用案例进行研究，首先建立理论方程，然后通过MATLAB/Simulink工具箱对该案例问题进行求解，得到答案。

◎帮助工程师更好地理解关键问题，以促进高效、高速、安全的车辆的开发、设计和优化。

车辆动力学是评价车辆操纵性、主动安全性和效率的关键。从操纵特性、轮胎特性、驱动技术和驾驶人控制等方面对车辆的受力与运动进行系统深入的理解，对车辆的设计、开发和优化至关重要。

本书作者Masato Abe(安部正人)是车辆动力学领域的先驱者。他基于车辆动力学理论，为读者建立了完整的动力学方程，无论是对高尔夫球车还是高端运动型轿车，都为其关键部件的设计提供了详细的理论支持和实践证明。而且在MATLAB工具箱的支持下，对影响车辆动力学的关键领域都可以进行分析，包括轮胎力学、操纵系统、车辆侧倾、驱动与制动、四轮驱动以及受车辆和驾驶人协调控制影响的车辆动力学与可控性等方面的问题。

本书为分析车辆动力学的受力、运动与控制方面提供了很好的方法。理论与实践相结合是本书的独特之处，在应用方面体现了非常可贵的价值。

汽车先进技术译丛

发动机试验理论与实践
如何将汽车制成精品
汽油车近零排放技术
车辆动力学及控制
载货汽车技术
轻量化设计
汽车总线系统
制动技术手册
减振器手册
汽车底盘手册
汽车工程手册　（德国版）
汽车工程手册　（美国版）
汽油机直喷技术
轻量化
汽车轮胎研发
汽车轻量化
车辆操纵动力学

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

上架指导　交通运输／汽车设计

ISBN 978-7-111-38407-6

策划编辑◎何士娟　/ 封面设计◎鞠杨

ISBN 978-7-111-38407-6

9 787111 384076

定价：69.80元

汽车先进技术译丛

车辆操纵动力学

Vehicle Handling Dynamics

(日)Masato Abe 著

喻凡 译

机械工业出版社

车辆动力学是评价车辆的驾驶特性、效率和主动安全性的关键。了解车辆的受力与运动、操纵特性、轮胎特性、驱动技术和驾驶人对车辆的操纵，这对车辆的设计、开发和优化是不可缺少的。

基于车辆动力学理论的阐述，本书“操纵动力学”为读者建立了完整的动力学方程，为车辆关键部件的设计提供了详细的理解。在 MATLAB 工具箱的支持下，对影响车辆动力学的关键领域都进行了分析，包括轮胎力学、操纵系统、车辆侧倾、驱动与制动、四轮驱动，以及受车辆和驾驶人协调控制影响的车辆动力学与可控性等方面的问题。

本书可以帮助汽车行业相关领域技术人员更好地理解关键技术问题，也可供高等院校相关专业的老师和学生阅读参考。

Vehicle Handling Dynamics
M. Abe and W. Manning
ISBN：978-1-8561-7749-8
Copyright© 2009 by Elsevier. All rights reserved.
Authorized Simplitied Chinese translation edition published by the Proprietor.
ISBN：978-9-812-72914-9
Copyright© 2012 by Elseiver(Singapore)Pte Ltd and China Machine Press.
All rights reserved.
Published in China by China Machine Press under special arrangement with Elservier(Singapore)Pte Ltd. . This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书简体中文版由 Elsevier(Singapore)Pte Ltd. 授予机械工业出版社在中国大陆地区(不包括香港、澳门特别行政区以及台湾地区)出版与发行。未经许可之出口，视为违反著作权法，将受法律之制裁。

本书封底贴有 Elsevier 防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。
北京市版权局著作权合同登记号：01-2011-2313。

图书在版编目(CIP)数据

车辆操纵动力学/(日)安部正人著；喻凡译.
—北京：机械工业出版社，2012.6
(汽车先进技术译丛)
书名原文：Vehicle Handling Dynamics
ISBN 978-7-111-38407-6

Ⅰ.①车… Ⅱ.①安…②喻… Ⅲ.①汽车—动力学 Ⅳ.①U461.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 105247 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：何士娟 责任编辑：何士娟 孙 鹏
责任校对：肖 琳 封面设计：鞠 杨
责任印制：乔 宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2012 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 18.5 印张 · 270 千字
0001—3000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-38407-6
定价：69.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

This book is dedicated to the memory of
Professor David Crolla

谨以此书献给我们怀念的
大卫·克罗拉教授

Masato Abe　Warren Manning　Fan Yu
安部正人　瓦润·曼宁　喻凡
In September of 2011 in Cambridge, England
二〇一一年九月于英国剑桥

PDG

前　言

本书旨在向读者介绍汽车操纵动力学方面的基本理论和一些应用实例，适合作为车辆工程专业本科生和研究生的汽车动力学教材。同时，本书也可作为汽车动力学与控制、底盘设计与开发等领域的研发人员和工程师的参考书籍。

本书所涉及的车辆运动均由轮胎力引起，而轮胎力又是由车辆本身的运动产生的。根据驾驶人的意图，车辆可以在地面上以任意方向运动，这点与飞行动力学和船舶动力学相似。

本书第 1 章定义了书中所研究的车辆运动。第 2 章考察了轮胎力学，由于车辆的运动取决于轮胎的受力情况，因此第 2 章是整本书的基础。然而，即使读者对轮胎力学方面的一些具体描述感到难以理解，仍可跳过第 2 章继续学习，而不会影响对汽车动力学的基础理论的理解。在第 3 章中，通过采用一个两自由度模型讲解了汽车动力学的基本理论。第 4 章仍然基于这个模型描述了外部干扰力作用下车辆的运动。对一辆可在地面上自由运动的车辆来说，这样的运动显然是不可避免的。第 5 章研究了转向系统对于车辆运动的影响。第 6 章描述了车身侧倾对车辆动力学的影响。第 7 章讨论了车辆的纵向运动对其侧向运动的影响。第 8 章介绍了具有主动控制的车辆的相关动力学基础知识。我们知道，车辆的运动通常是由人(即驾驶人)所控制的，第 9 章描述了有关由驾驶人控制的车辆运动方面的内容，而第 10 章则阐述了驾驶人对操纵性能的评价与车辆动力学特性之间的关系。

对于只需了解车辆动力学以及驾驶人特性方面基础理论的读者，可在阅读第 1 ~4 章之后直接跳到第 9 章。而对那些希望详细学习车辆动力学的读者，则可根据个人兴趣继续阅读第 5 ~10 章。

本书的最初版本由作者以日文撰写并在日本出版，随后曾由作者的一名硕士研究生 Y. W. Chai 将其译成英文。作者在书中又加入

了一些新内容，如在每章中添加了例题以及每章后所留的习题。W. Manning 重新修改了整本书的英文版本。

出版流程是在作者的老朋友 D. A. Crolla 的建议下进行的。在整个出版发行过程中，他始终如一地给予了我们宝贵的意见。

不得不说，没有上述三位的支持本书难以出版。在此，作者对他们为本书的出版所作的贡献深表感激。

作者还要感谢他的以前的硕士研究生 J. Ishio，他为本书协助编写了各章中的例题。此外，还要特别感谢 Yokohama 橡胶有限公司，感谢他们为本书第 2 章提供的那些轮胎数据。

最后，作者还要感谢 Elsevier 科技书籍出版社的编辑和出版人员，感谢他们为本书出版所付出的努力。

Masato Abe

2009 年 3 月

符　　号

为方便读者进行阅读，本书自第 3 ~ 10 章将统一使用以下符号作为车辆动力学表述中的基本符号，一般不再对此加以说明。然而，当必须用这些符号表达其他意义时，我们会在章节中所有使用之处特别加以进行注明。

m：车身质量

I：车辆的横摆转动惯量

l：轴距

l_f：车辆质心到前轴的距离

l_r：车辆质心到后轴的距离

K_f：前轮的侧偏刚度

K_r：后轮的侧偏刚度

V：车速

δ：前轮转向角

β：车辆质心侧偏角

r：横摆角速度

θ：横摆角

x：表示车辆的纵向

y：表示车辆的侧向及侧向位移

t：表示时间

s：拉普拉斯变量

若在每章使用了上述符号以外的符号时，我们会在该章第一次使用时给予说明。

值得注意的是，$\ddot{x}$ 和 $\ddot{y}$ 通常用来表示变量 x 和 y 对时间的二次导数，但本书中为方便起见，用其分别表示车辆的纵向和侧向加速度。另外，$\delta(s)$ 一般用来表示以 s 为自变量的函数，但本书中用来表示对 δ 进行的拉普拉斯变换，并对所有变量通篇均以该方式表示之。

目　　录

前言
符号

第 1 章　车辆动力学与控制 …… 1

1.1　对车辆的定义 …… 1
1.2　四轮车辆简化模型 …… 1
1.3　对车辆运动的操纵 …… 3

第 2 章　轮胎力学 …… 4

2.1　引言 …… 4
2.2　轮胎侧向力的产生 …… 4
2.3　轮胎侧偏特性 …… 8
2.4　驱动和制动情况下轮胎的侧偏特性 …… 28
2.5　轮胎的动态侧偏特性 …… 40
习题 …… 44
参考文献 …… 45

第 3 章　车辆动力学基础 …… 46

3.1　引言 …… 46
3.2　车辆运动方程 …… 46
3.3　车辆的稳态转向 …… 60
3.4　车辆的动态特性 …… 86
习题 …… 119
参考文献 …… 120

第 4 章　外部干扰引起的车辆运动 …… 121

4.1　引言 …… 121
4.2　质心侧向力所引起的车辆运动 …… 121
4.3　侧风引起的车辆运动 …… 139
4.4　结论 …… 149
习题 …… 150
参考文献 …… 151

第 5 章　转向系与车辆动力学 …… 152

5.1　引言 …… 152
5.2　转向系模型与运动方程 …… 152
5.3　转向系特性对车辆运动的影响 …… 154
习题 …… 165
参考文献 …… 166

第 6 章　车身侧倾与车辆动力学 …… 167

6.1　引言 …… 167
6.2　侧倾几何学 …… 167
6.3　车身侧倾与车辆动力学 …… 175
6.4　考虑侧倾的运动学方程 …… 182
6.5　侧倾对车辆动力学的影响 …… 194
习题 …… 198
参考文献 …… 198

第 7 章　驱动和制动时的车辆运动 …… 200

7.1　引言 …… 200
7.2　包含纵向运动的运动方程 …… 200
7.3　车辆的准稳态转向 …… 201
7.4　车辆转向的瞬态响应 …… 208

第 8 章　车辆动力学主动控制 …… 213

8.1　引言 …… 213
8.2　附加后轮转向的车辆运动 …… 213
8.3　使侧偏角为零的后轮转向控制 …… 221
8.4　基于后轮转角的横摆角速度模型 …… 223
8.5　前、后轮转向主动控制 …… 225
8.6　车辆运动的直接横摆力矩控制(DYC) …… 229
参考文献 …… 240

第 9 章　驾驶人操纵的车辆运动 …… 241

9.1　引言 …… 241
9.2　驾驶人的控制行为 …… 242
9.3　驾驶人控制下的车辆运动 …… 243
9.4　驾驶人对车辆特性的适应性和移线行为 …… 254
9.5　驾驶人模型参数的辨识 …… 260
习题 …… 264
参考文献 …… 265
扩展阅读 …… 265

第 10 章　车辆的操纵品质 …… 266

10.1　引言 …… 266
10.2　车辆的可控性 …… 266
10.3　车辆的运动特性与可控性 …… 268
10.4　基于驾驶人模型的车辆操纵品质评价的可行性 …… 278
参考文献 …… 283

第 1 章　车辆动力学与控制

1.1　对车辆的定义

地面行驶的车辆主要可分为两大类：一类是被约束于地面轨道上行驶的车辆，例如轨道车辆；另一类是不受轨道约束、通过对其车轮的操纵，自由行驶在地面上的车辆，例如路面车辆。

飞机可以在空气中自由飞行，船舶可以在水面上自由航行。而通过对车轮的操纵，路面车辆也同样与飞机和船舶共享着这一特点，即它可以在地面做无约束的运动。

从动力学的观点来看，以上这三种运动体都受到由自身运动而产生的力，并利用这种力来实现各自所期望的运动，这是三者在本质上所具有的共性。具体一点讲，飞机通过机翼与空气的相对运动产生升力；船舶通过船体与水的相对运动产生动力；而在地面行驶的车辆则依靠其轮胎与地面的相对运动而产生作用于轮胎的侧向力。

从上述三种运动体的形式来看，其动力学特性与控制是与它们各自的自然功能紧密相关的。对飞机和船舶而言，由此展开的研究已经分别产生了飞行动力学和船舶动力学。而对车辆而言，同样也产生了车辆动力学。

需要说明的是，本书所研究的是这样一种车辆，它可以像飞机和船舶一样依靠自身运动所产生的力，来实现其在地面上的独立运动。

1.2　四轮车辆简化模型

为了研究车辆动力学及其控制，首先假设了一个典型车辆的数学模型，如图 1.1 所示。该模型由一个刚性的车身以及安装于其上的前

后各两个可操纵的车轮组成。轿车、货车、公共汽车以及农用车辆均可抽象地简化成这样的模型。表面上看，这些不同车辆之间似乎不存在动力学上的共性，但当采用了这一简单的四轮车辆模型后，就能获取这些不同车辆在动力学方面的基本信息了。

在图 1.1 所示的车辆数学模型中，假设车轮不具有质量，车辆的质量集中于刚性的车身。我们取车辆的质心为坐标原点，车辆的纵向为 x 轴，侧向为 y 轴，垂直方向为 z 轴，这样就建立了固定于车辆的坐标系。

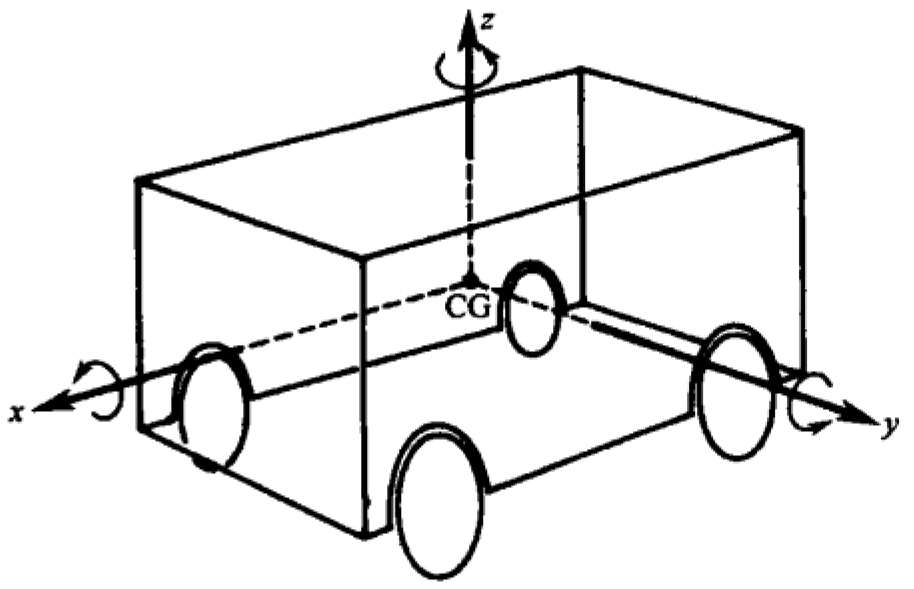


图 1.1　车辆动力学模型

以此坐标系为基准，车辆的运动具有如下六个独立的自由度：

1）z 方向上的垂向运动。

2）y 方向上的侧向运动。

3）x 方向上的纵向运动。

4）绕 x 轴的侧倾运动。

5）绕 y 轴的俯仰运动。

6）绕 z 轴的横摆运动。

上述运动可以分为两类：一类为与转向操纵无直接关系的 1）、3）、5）的运动，其中 1）是由路面不平引起的垂向运动，它关系到车辆的乘坐舒适性；3）为车辆的纵向直线运动，产生于驾驶人通过踩加速踏板或制动踏板所引起的驱动或制动；5）也是由路面不平、驱动或制动而引起的运动，同样关系到车辆的乘坐舒适性。

而车辆在 y 方向上的侧向运动 2）和绕 z 轴的横摆运动 6）基本上是由对车辆所进行的转向操纵而产生的；而绕 x 轴的侧倾运动 4）则是伴随着运动 2）和 6）而产生的，当然，路面不平也会导致这种运动。

如前所述，本书所研究的道路车辆是可通过转向操纵而在地面上沿任意方向自由运动的车辆。因此，本书中我们将主要研究由转向操纵引起的 y 方向上的侧向运动 2）、绕 x 轴的侧倾运动 4）以及绕 z 轴的横摆运动 6）。

1.3　对车辆运动的操纵

对普通车辆而言，其侧向运动、横摆运动和侧倾运动的产生来自于驾驶人的转向操纵，同时还取决于车辆本身的动力学特性。这里，并非说驾驶人随意地转向，他要持续不断地观察着前方的目标路径，要么正在跟随着他的目标路径，要么正在设定一个要跟随的新的目标路径。驾驶人同时要观察许多情况，比如车辆相对于目标路径正处于什么位置以及当前车辆的运动情况；此外，他还要预测车辆接下来会怎样运动。基于以上这些信息，驾驶人做出判断并进行恰当的转向操纵。这样，车辆按照给定的或驾驶人设定的目标路径运动。图 1.2 给出了车辆运动与驾驶人控制之间的关系框图。

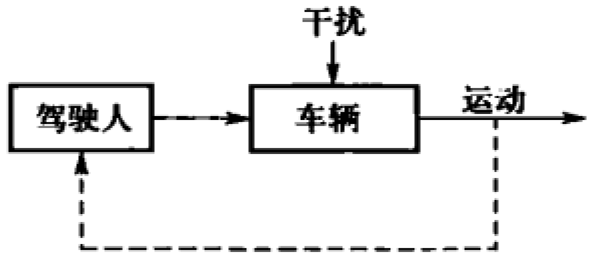


图 1.2　车辆与驾驶人控制

对不受预设轨道所束缚、可在平面内自由运动的车辆而言，只有当其受到驾驶人适当的转向控制作用下，它才能进行有目的、有意义的运动。

因此，我们最感兴趣的首先是车辆本身固有的动力学特性，并可通过观察某特定转向输入下车辆的运动来得以了解。接下来，我们要研究在驾驶人的操纵下车辆的运动情况。最终的目的是：了解车辆的动力学特性，以使驾驶人更容易地对其进行操纵。

第2章　轮胎力学

2.1　引言

第1章中，我们解释了本书是如何来处理车辆的独立运动的，即车辆在未受预设于地面的轨道束缚情况下，在水平平面内所进行的运动。而实现这一运动的力由车辆与地面之间的相对运动而产生。

车辆与地面的接触是通过车轮得以实现的。如果车轮存在一个与其回转面相垂直的速度分量，那么它将会受到垂直于其行驶方向的作用力。换言之，车辆与地面的相对运动使车轮受到来自地面的力，它反过来又使车辆运动。这就相当于飞机飞行中垂直作用于机翼的升力，以及船舶在转向航行中垂直作用于船体运动方向的浮力(相对于船体为侧向力)。

车辆上的车轮在转动中不仅需要支撑车身重量、产生驱动力和制动力，还要在使车辆能独立于轨道或导轨而实现自由运动的过程中起主要作用。对我们所研究的车辆而言，其基本功能就体现于此。

在对车辆动力学与控制的研究中，掌握轮胎受力方面的知识是必需的。因此，本章将主要阐述由于车轮与地面相对运动所产生的力的机理，并解释其特性。

2.2　轮胎侧向力的产生

2.2.1　轮胎和侧偏角

一般来说，当车辆直线行驶时，车轮的旋转平面(其航向)与其行驶方向是一致的。换言之，车轮的行驶方向位于其旋转平面内。然而，当车辆产生侧向运动或/和横摆运动时，车轮的行驶方向就可能

会跑出其旋转平面。

图 2.1 为车轮的俯视图，其中图 a 表示车轮的行驶方向位于其旋转平面内的情况；而图 b 表示车轮的行驶方向不在其旋转平面内的情况，也就是所谓的伴有侧向滑动的情况。车轮的行驶方向与车轮旋转平面(即车轮的航向)之间的夹角被称为侧偏角。

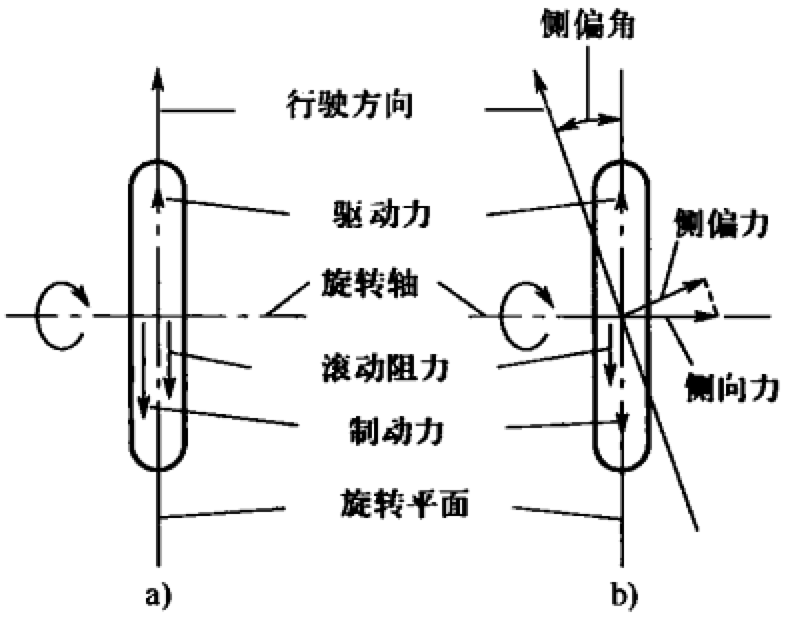


图 2.1 运动中的车轮

a) 车轮的行驶方向位于其旋转平面内 b) 车轮的行驶方向不在其旋转平面内

车辆在行驶过程中，其车轮受到沿行驶方向作用的驱动力、制动时产生的制动力以及一直存在着的滚动阻力。如果车轮发生如图 2.1b所示的侧滑时，将会产生垂直于车轮旋转平面的力，我们可以将其视为车轮发生侧向滑动时抵抗侧滑的反作用力，这也是车辆实现独立运动所必须依赖的、非常重要的力，我们通常称之为侧向力。而在垂直于车轮旋转平面的分力被称为侧偏力。当侧偏角很小时，可以认为侧偏力与侧向力相同。

上述侧向力可由图 2.2 所示的流体动力学中的升力给予解释，侧向力对应于在流体中以迎面角前进的物体所受到的升力。

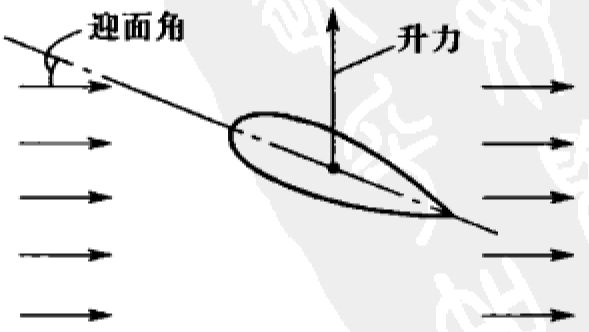


图 2.2 物体所受到的升力

尽管轮胎有很多种，但在做伴有侧滑的转动时，都会产生垂直于车轮旋转面的力。图 2.3 比较了在小侧偏角情况下，充气橡胶轮胎车轮、实心

橡胶轮胎车轮和铁车轮分别产生的侧向力。

由图可见，由于车轮的种类不同，所产生的侧向力大小显著不同。尤其是铁车轮，所能产生的最大侧向力还不到橡胶轮胎的三分之一。而且，充气橡胶轮胎车轮所能产生的侧向力大于实心橡胶轮胎车轮。对独立运动的车辆而言，伴有侧滑的车轮所能产生的侧向力越大越好。因此，可在无约束的平面上自由运动的车辆通常都装有充气橡胶轮胎。原因就是，它不仅有利于车辆的乘坐舒适性，而且还有利于获得操纵车辆所需的侧向力。

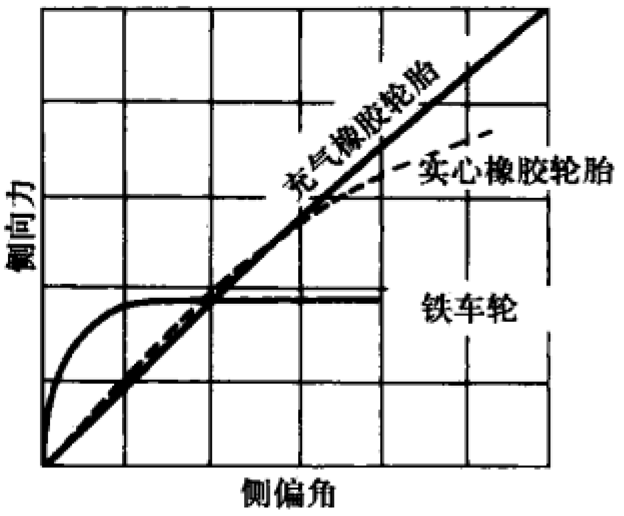


图 2.3　不同车轮的侧向力比较

以下章节中，我们将充气橡胶轮胎简称为轮胎，并介绍伴有侧滑的轮胎所受到的力的产生机理及其特性。

2.2.2　侧滑轮胎的变形和侧向力

一般而言，轮胎力通过轮胎与地面的接地区域而发生作用。一个伴有侧向滑动的轮胎如图 2.4 所示，在其接地区及外周将会发生变形：图 a 表示从轮胎的纵向和侧向观察到的轮胎变形；图 b 为俯视观察到的轮胎接地区及其外周的变形。

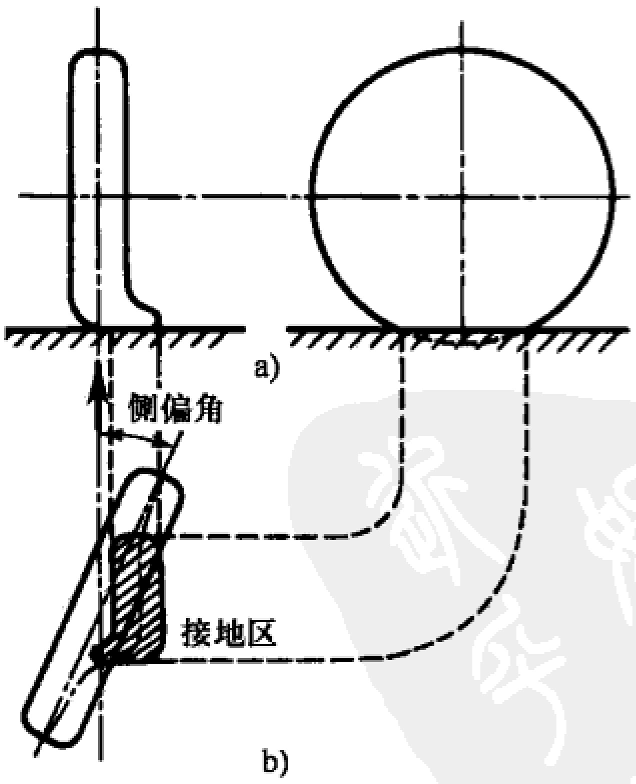


图 2.4　侧偏情况下轮胎的变形
a）纵向和侧向观察　b）俯视观察

从轮胎接地区的前部看，轮胎变形的方向几乎与轮胎行驶的方向平行，这部分与地面之间并未产生相对滑动。如果轮胎侧偏角较小时，整个轮胎接地区同样地保持与轮胎行驶方向平行且与地面不发生相对滑动，而轮胎接地区的后端产生的侧向变形则达

到最大。

当侧偏角增大时，轮胎接地区的前端仍保持与轮胎行驶方向几乎平行。而接近接地区中心附近，随着变形的减缓，侧向变形在接地区某处达到最大。此后，轮胎接地区滑离轮胎的中心线，且侧向变形不再增加。

如果轮胎侧偏角再进一步增大，则侧向变形最大的点会迅速地移向前方。当轮胎的侧偏角达到 10°～12°时，接地区将不再平行于轮胎行驶方向，而是前、后部产生与轮心几乎对称的变形。此时，可认为接地区的所有部分都产生了相对于地面的滑动。

轮胎这样的侧向变形产生了一个作用于轮胎接地区的侧向力，它的分布与轮胎变形的分布相对应。在小侧偏角情况下，轮胎的这种侧向力通常被称作侧偏力。从轮胎的侧向变形来看，产生的侧向力其作用点不一定与轮胎接地区的中心重合，因此会绕轮胎接地区的中心产生一个力矩，即所谓的“回正力矩”，其作用方向是使轮胎侧偏角减小。

2.2.3 轮胎的外倾和侧向力

如图 2.5 所示，轮胎旋转平面与铅垂平面之间的夹角称为轮胎外倾角。如果轮胎保持外倾角 ϕ 不变，并在水平面内作自由转动，则其轨迹应该如图 2.5 所示，即为圆心在 O 点且半径为 $R/\sin\phi$ 的一段圆弧。如果具有外倾角的轮胎不能作这样的圆周运动，而是强制其只作直线运动，则它将会受到图中所示的力 P 的作用，这一由轮胎相对地面外倾而产生的力被称之为外倾侧向力。

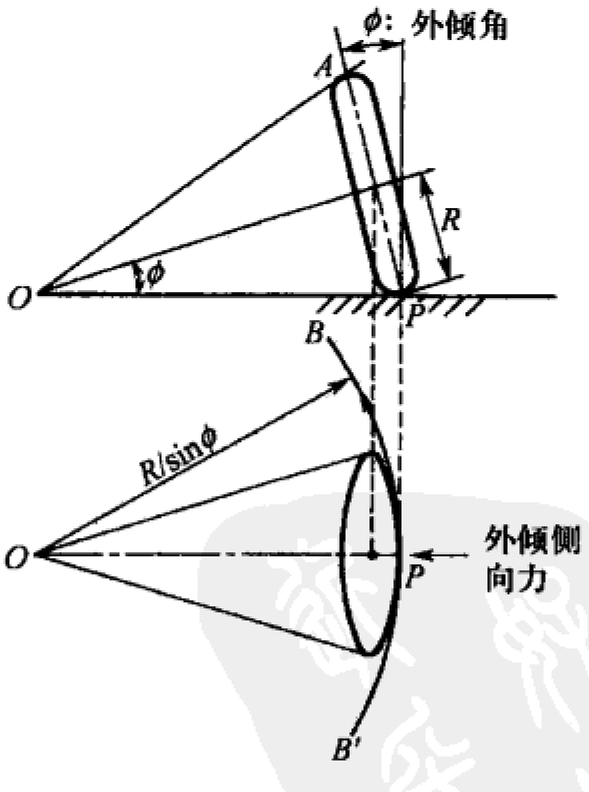


图 2.5 具有外倾角且在外倾侧向力作用下的轮胎

2.3 轮胎侧偏特性

正如第2.2节所展开的内容，我们将轮胎产生侧向力和力矩的特性定义为侧偏特性。本节中，我们将更为详细地考察轮胎的侧偏特性。

2.3.1 Fiala 理论

有关轮胎侧滑产生侧向力的分析中，Fiala 所提出的数学模型被广为接受[1]，通常称其为关于轮胎侧偏特性的 Fiala 理论，并已成为许多人用以说明轮胎侧偏特性的基础理论之一[2]。

我们将根据 Fiala 理论，对轮胎侧偏特性进行理论研究。轮胎的结构模型如图2.6所示，其中 A 为一个刚体，相当于车轮的轮辋；B 为众多的等效弹簧，分别在径向及侧向等效替代可弹性变形的充气内胎和轮胎侧壁；C 相当于较薄的轮胎胎面基底，并连接轮胎两边的侧壁；D 相当于轮胎胎面橡胶，但它不是环状的连续体，而是由大量环绕轮胎圆周的独立弹性体组成的。

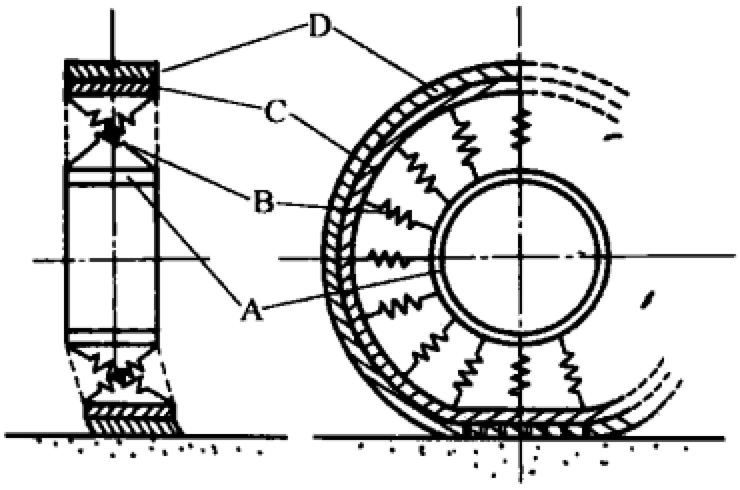


图2.6 轮胎结构模型

当侧向力作用于轮胎接地区时，轮胎将发生侧向变形。由于轮辋是刚体，不发生变形，而轮胎胎面基底则会产生侧向的弯曲变形。因而胎面橡胶会由于胎面基底与地面之间的剪切力而发生变形，如图2.7所示。

假设在接地区的前端和后端，轮胎胎面基底的变形相等，这些点的连接线就是轮胎胎面基底的中心线，我们将其定义为 x 轴。我们定义接地区前端垂直于 x 方向的轴为 y 轴。x 轴平行于轮辋中心线，且变形前平行于轮胎胎面基底中心线。在此坐标系下，x 表示沿着 x 轴

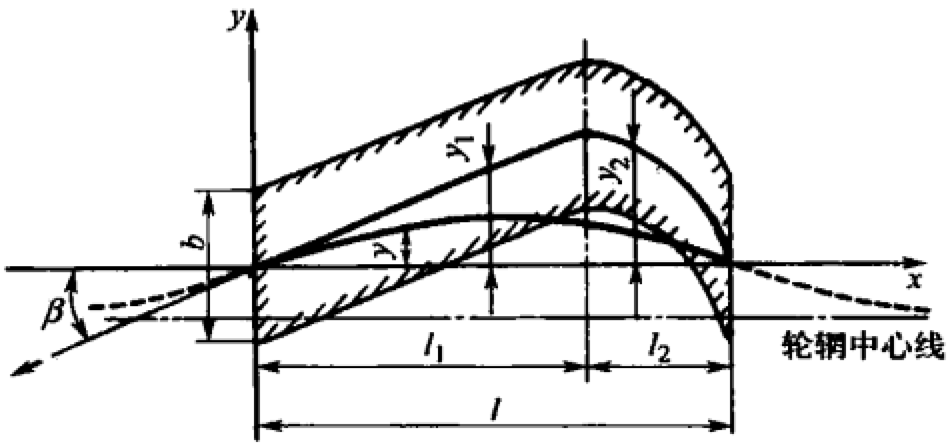


图 2.7　轮胎变形模型

方向到轮胎接地区前端的距离，y 表示轮胎胎面基底偏离 x 轴的侧向位移。y_1 表示在 $0 \leqslant x \leqslant l_1$ 范围内接地区中心线偏离 x 轴的侧向位移，y_2 表示在 $l_1 \leqslant x \leqslant l$ 范围内接地区中心线偏离 x 轴的侧向位移。如第 2.2.2 小节所述，在 $0 \leqslant x \leqslant l_1$ 范围内，轮胎与地面间不存在相对滑动。$l_1 \leqslant x \leqslant l$ 则表示产生相对滑动的区域。β 为轮胎的侧偏角，l 为接地区的长度，b 为接地区的宽度。

首先，我们来观察轮胎胎面基底的侧向变形 y。如果轮胎胎面基底沿周向展开，则如图 2.8 所示，可将其视为一根无限长的梁，且该梁被放置于由众多与图 2.6 中的弹簧 B 相当的弹性基础上。

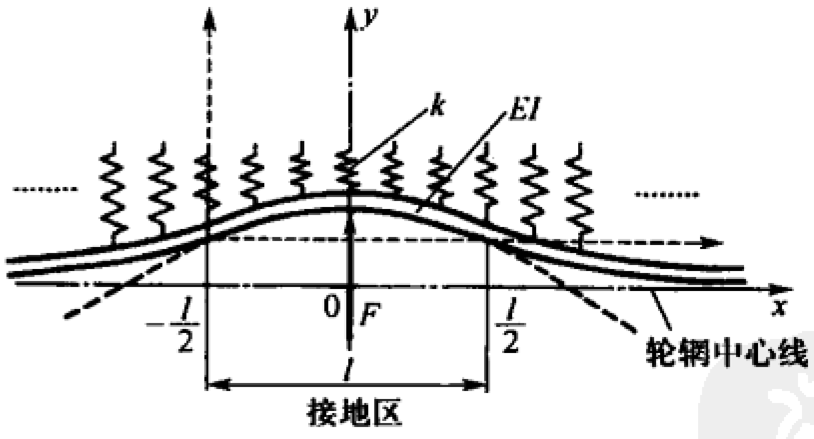


图 2.8　轮辋变形模型

设轮胎所受的侧向力为 F，取轮辋中心线为 x 轴，通过轮胎中心且与 x 轴垂直的方向为 y 轴，我们来考察上述梁的变形。如果轮胎所受的侧向力仅沿 y 方向集中作用于 $x=0$ 处，可得到以下方程：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = w(x) \tag{2.1}$$

（如果 $x \neq 0$，则 $w(x)=0$；如果 $x=0$，则 $w(x)=F$）

式中，E 为轮胎胎面材料的弹性模量；I 为轮胎胎面基底的截面惯性矩；k 为单位长度弹性基础的弹簧常数。

对上式求解，得到侧向位移 y 的公式为

$$y=\frac{\alpha F}{2k}e^{-\alpha x}[\cos\alpha x+\sin\alpha x] \tag{2.2}$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{k}{EI}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{2.3}$$

在 $|\alpha x| \ll 1$ 的情况下，假设接地区域内轮胎胎面基底的变形为 y，则有：$\cos\alpha x \approx 1$、$\sin\alpha x \approx \alpha x$，于是 y 可用 x 的二次式近似表示如下：

$$y=\frac{\alpha F}{2k}(1-\alpha^2x^2) \tag{2.4}$$

此外，若移动原点使得 y 在 $x=0$、$x=l$ 时为 0，则在以该变换后的坐标下表达 y 如下：

$$y=\frac{\alpha^3 l^2 F}{2k}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{2.5}$$

上述方程描述了图 2.7 中的轮胎胎面基底侧向位移 y。接下来，我们考察接地区中心线的侧向位移 y_2。在 $0 \leqslant x \leqslant l_1$ 范围内，轮胎与地面之间不存在相对滑动。接地区沿轮胎侧向行驶的反方向发生相对变形。各点沿纵向的接地面侧向位移可表示如下：

$$y_1=\tan\beta x \tag{2.6}$$

轮胎胎面基底的侧向位移由式(2.5)给出，轮胎胎面橡胶的侧向位移由式(2.6)给出。如图 2.9 所示，胎面橡胶与胎面基底之间产生了一个 $(y_1-y)/d$ 的剪切变形。在接地区纵向的各点处，每单位长度作用

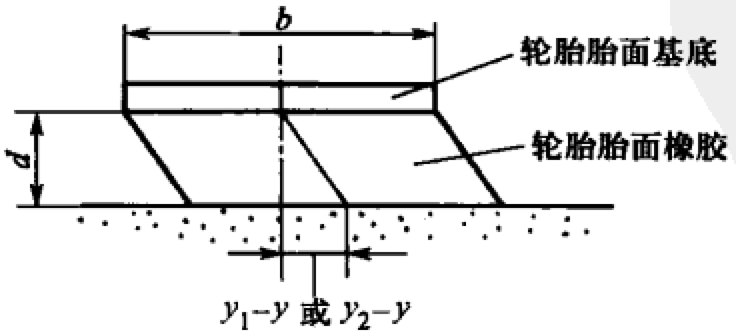


图 2.9　胎面橡胶剪切变形示意图

有下式所示的侧向力：

$$f_1 = K_0(y_1 - y) = K_0\left[\tan\beta x - \frac{\alpha^3 l^2 F}{2k}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$K_0 = G\frac{b}{d} = \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{b}{d} \tag{2.8}$$

式中，G 为轮胎胎面的剪切模量，ν 为泊松比。

由图2.7可以看出，随着接地区向后移动，$y_1 - y$ 将变大。如果 f_1 的值超过地面与轮胎胎面橡胶之间的摩擦力，这两者之间将产生相对滑动，其范围为 $l_1 \leqslant x \leqslant l$，且在此区域内轮胎胎面橡胶的剪切变形为$(y_2 - y)/d$。导致这一变形的力 f_2 即为轮胎胎面橡胶与地面之间的摩擦力。为简单起见，设轮胎的垂直载荷为 W，并假定由此载荷产生的接地区接地压力 p 沿 x 轴向的分布如图2.10所示，则可由峰值位于轮胎接地区中心的二次式近似表示如下：

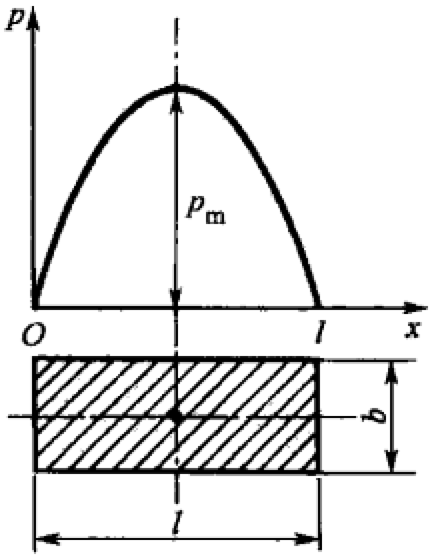


图2.10 接地面压力分布

$$p = 4p_m\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.9}$$

$$p_m = \frac{3W}{2bl} \tag{2.10}$$

那么 f_2 可写为

$$f_2 = K_0(y_2 - y) = \mu p b = 4\mu p_m b\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.11}$$

式中，μ 为地面与轮胎胎面橡胶之间的摩擦系数；l_1 为满足 $f_1 = f_2$ 时 x 的值。

$$K_0\left[\tan\beta x - \frac{\alpha^3 l^2 F}{2k}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] = 4\mu p_m b\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.12}$$

因此，通过求解上述关于 x 的方程，得 l_1 如下：

$$l_1 = l - \frac{K_0 l^2 \tan\beta}{\dfrac{K_0\alpha^3 l^2}{2k}F + 4\mu p_m b} \tag{2.13}$$

由此可得，在接地区的纵向各点处，作用于微小长度 dx 的侧向力在 $0 \leqslant x \leqslant l_1$ 范围内为 $f_1 dx$；在 $l_1 \leqslant x \leqslant l$ 的范围内为 $f_2 dx$。于是，作用于整个接地区的合力 F(即侧向力)可由以下方程求得：

$$F = \int_0^{l_1} f_1 dx + \int_{l_1}^{l} f_2 dx = K_0 \int_0^{l_1} \left[\tan\beta x - \frac{\alpha^3 l^2 F}{2k} \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] dx + \int_{l_1}^{l} 4\mu p_m b \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \tag{2.14}$$

将式(2.13)代入式(2.14)，并对其进行积分，则可求得两边含有 F、且求解复杂的方程。于是，Fiala 对此进行了近似求解如下：

$$F = \frac{K_1 l^2}{2}\tan\beta - \frac{1}{8}\frac{K_1^2 l^3}{\mu p_m b}\tan^2\beta + \frac{1}{96}\frac{K_1^3 l^4}{\mu^2 p_m^2 b^2}\tan^3\beta \tag{2.15}$$

$$K_1 = \frac{K_0}{1 + \dfrac{\alpha^3 l^3}{12k} K_0} \tag{2.16}$$

以上介绍的即为表达轮胎侧偏角与侧向力关系的基本方法。

由图 2.7 可以看出，作用于轮胎接地面的侧向力并非对称于接地面中心。于是，它导致侧向力产生一个绕接地面中心的铅垂轴的力矩，也就是回正力矩。作用于接地面各点处微小长度 dx 上的侧向力所产生的绕接地区中心的力矩，在 $0 \leqslant x \leqslant l_1$ 范围内为 $(x - l/2) f_1 dx$；在 $l_1 \leqslant x \leqslant l$ 的范围内为 $(x - l/2) f_2 dx$。因此，回正力矩 M 为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{l_1} \left(x - \frac{l}{2}\right) f_1 dx + \int_{l_1}^{l} \left(x - \frac{l}{2}\right) f_2 dx \\ &= K_0 \int_0^{l_1} \left(x - \frac{l}{2}\right)\left[\tan\beta x - \frac{\alpha^3 l^2 F}{2k}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] dx \\ &\quad + \int_{l_1}^{l} \left(x - \frac{l}{2}\right) 4\mu p_m b \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \end{aligned} \tag{2.17}$$

若将式(2.17)中的 l_1 用式(2.13)替换，则会使方程变得太复杂。根据 F 的近似式(2.15)，Fiala 近似求得 M 为

$$M = \frac{K_1 l^3}{12}\tan\beta - \frac{1}{16}\frac{K_1^2 l^4}{\mu p_m b}\tan^2\beta + \frac{1}{64}\frac{K_1^3 l^5}{\mu^2 p_m^2 b^2}\tan^3\beta - \frac{1}{768}\frac{K_1^4 l^6}{\mu^3 p_m^3 b^3}\tan^4\beta \tag{2.18}$$

上式为表示轮胎侧偏角与回正力矩之间关系的基本方程。

当β很小时，单位侧偏角的侧向力(即侧偏刚度)表示如下：

$$K = \left(\frac{dF}{d\beta}\right)_{\beta=0} = \frac{K_1 l^2}{2} \tag{2.19}$$

由式(2.10)，轮胎的最大摩擦力为

$$\mu W = \frac{2}{3}\mu p_m bl \tag{2.20}$$

若定义ψ为

$$\psi = \frac{K}{\mu W}\tan\beta = \frac{3K_1 l}{4\mu p_m b}\tan\beta \tag{2.21}$$

则式(2.15)和式(2.18)可写为

$$\frac{F}{\mu W} = \psi - \frac{1}{3}\psi^2 + \frac{1}{27}\psi^3 \tag{2.22}$$

$$\frac{M}{\mu W} = \frac{1}{6}\psi - \frac{1}{6}\psi^2 + \frac{1}{18}\psi^3 - \frac{1}{162}\psi^4 \tag{2.23}$$

关于ψ对式(2.22)和式(2.23)进行微分，并令其为0，则可求得$F/(\mu W)$在$\psi=3$时取最大值，为$F/(\mu W)=1$；$M/(\mu W)$在$\psi=3/4$时取最大值，为$M/(\mu W)=27/512$。

换言之，侧向力F在侧偏角为

$$\tan\beta = \frac{3\mu W}{K} \tag{2.24}$$

时为最大，其最大值F_{max}为

$$F_{max} = \mu W \tag{2.25}$$

同时，回正力矩M在侧偏角为

$$\tan\beta = \frac{3\mu W}{4K} \tag{2.26}$$

时为最大，最大值M_{max}为

$$M_{max} = \frac{27}{512}l\mu W \tag{2.27}$$

根据式(2.22)和式(2.23)，可绘出无量纲的侧向力$F/(\mu W)$、回正力矩$M/(l\mu W)$和侧偏角$\psi = K\tan\beta/(\mu W)$的关系，如图2.11和图2.12所示。

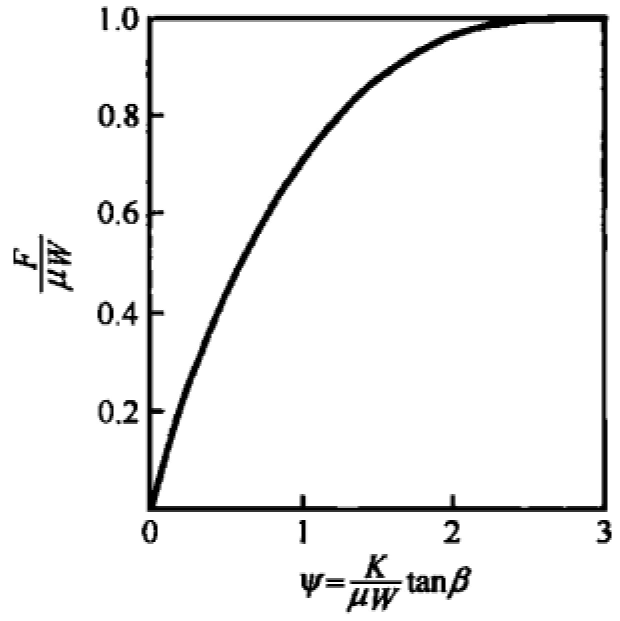


图 2.11　侧向力与侧偏角关系

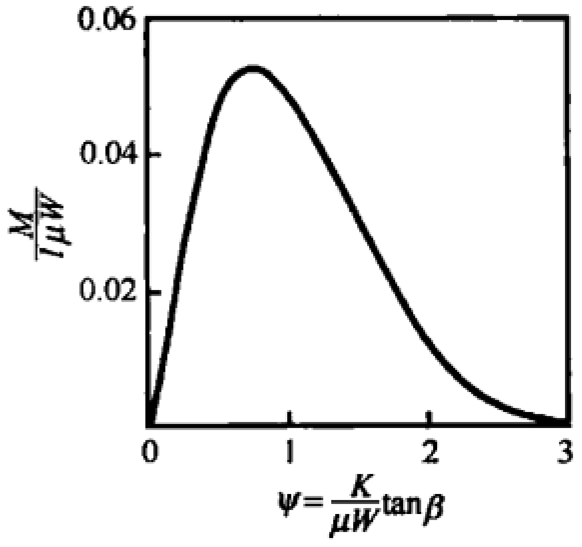


图 2.12　回正力矩与侧偏角的关系

由图 2.11 中可以看出，当侧偏角 β 较小时，侧向力几乎与 $\tan\beta$ 成正比。而当 β 大于某一特定值后，侧向力则趋于饱和，不再随侧偏角的增大而增大。由图 2.12 可见，当侧偏角 β 较小时，回正力矩 M 也几乎与 $\tan\beta$ 成正比。当 β 大于某一值之后，回正力矩迅速趋于饱和，并开始随着侧偏角的增大而减小。若侧偏角 β 很小，则 $\tan\beta\approx\beta$，可认为侧向力和回正力矩均与 β 成正比。当 β 较大时，则侧向力不再与 β 成正比，即具有非线性特性。

在侧偏角较小的范围内，即 $\tan\beta\approx\beta$，β 的二次及以上项可忽略不计。此时，相应于侧偏角 β，侧向力和回正力矩可由式(2.15)和式(2.18)分别表示如下：

$$F\approx\frac{K_1 l^2}{2}\beta=K\beta \tag{2.28}$$

$$M\approx\frac{K_1 l^3}{12}\beta=\xi_n K\beta \tag{2.29}$$

式中，K 通常被称为侧偏刚度，由式(2.19)给出。根据式(2.8)和式(2.16)，它可写成以下形式：

$$K=\frac{\frac{l^2}{2}\frac{b}{d}G}{1+\frac{\alpha^3 l^3}{12k}\frac{b}{d}G} \tag{2.30}$$

从侧向力的作用点到接地区中心的距离被称为轮胎拖距，如图2.13所示，其定义式如下：

$$\xi_n = \frac{M}{F} \qquad (2.31)$$

当β较小时，根据式(2.28)和式(2.29)，可得其值为$l/6$。

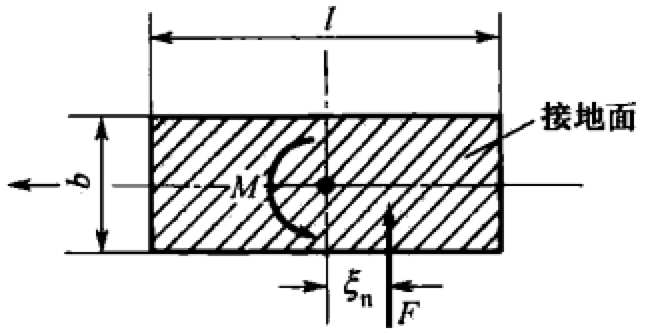


图2.13 轮胎拖距

到此为止，我们考察了有侧偏角时作用在轮胎上的力。接下来，我们将考察有外倾角且保持直线行驶的轮胎所受的作用力，即外倾侧向力。Fiala对有外倾角的轮胎作了如下解析。

当考虑轮胎的外倾时，如图2.14所示，即使不产生侧偏角，轮胎胎面基底的中心线也不是直线，而是一段圆弧。

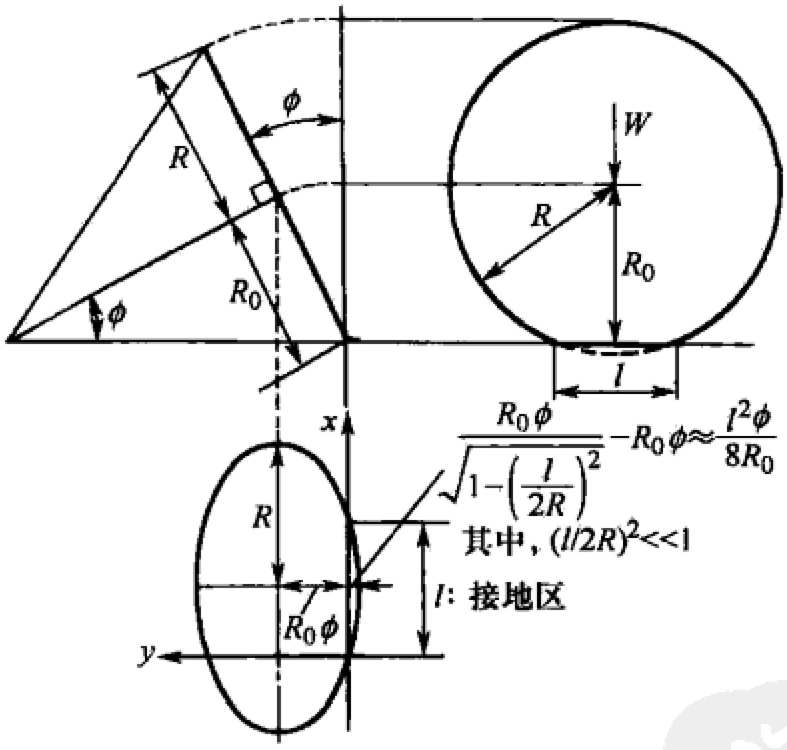


图2.14 轮胎外倾时的胎面基底中心

若采用与图2.7相同的坐标系，并以抛物线近似这段圆弧，则有

$$y_c = -\frac{l^2\phi}{2R_0}\frac{x}{l}\left(x-\frac{x}{l}\right) \qquad (2.32)$$

式中，R_0为轮胎胎面基底的有效半径，由下式给出：

$$R_0 = R - \frac{W}{k_e} \tag{2.33}$$

式中，R 为无载荷时轮胎胎面基底的半径；k_e 为轮胎的纵向弹簧常数。

以上情形如图 2.15 所示。如果轮胎在保持着外倾角的状态下自由行驶，则轮胎胎面橡胶的接地区中心将绘出如图 2.5 所示的弧形轨迹。然而，如果轮胎只是作直线运动，则轮胎的接地区中心应当沿着 x 轴运动。因此，在轮胎胎面基底与地面之间的轮胎胎面橡胶上将产生剪切变形，与此变形相应的侧向力则会作用于接地区。这个力就是外倾侧向力 F_c。假设它集中作用于接地区中心，则由此产生的轮胎胎面基底变形为

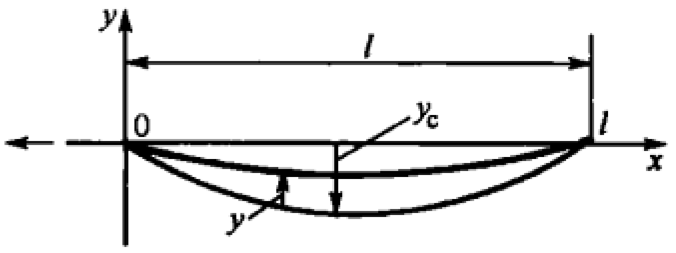


图 2.15　轮胎外倾时的胎面变形

$$y = \frac{\alpha^3 l^2 F_c}{2k}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.34}$$

由于接地区距 x 轴的位移为零，故在 x 方向各点上的轮胎胎面基底剪切变形为：$-(y_c + y)$。因此，作用于轮胎的外倾侧向力为

$$F_c = \int_0^l -K_0(y_c + y)\,\mathrm{d}x = K_0\left(\frac{l^2\phi}{2R_0} - \frac{\alpha^3 l^2 F_c}{2k}\right)\int_0^l \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{2.35}$$

对上式积分求解，得到 F_c 如下：

$$F_c = \left(\frac{K_0}{1 + \frac{\alpha^3 l^3}{12k}K_0}\right)\frac{l_3}{12R_0}\phi = \frac{K_1 l^3}{12R_0}\phi \tag{2.36}$$

由式(2.36)可以看出，外倾侧向力与外倾角成正比，其比例系数 K_c 被称为外倾侧向力系数。通过式(2.8)，可以将它表示为

$$K_c = \frac{K_1 l^3}{12R_0} = \left(\frac{\frac{l^2}{2}\frac{b}{d}G}{1 + \frac{\alpha^3 l^3}{12k}\frac{b}{d}G}\right)\frac{l}{6R_0} = \frac{1}{6R_0}K \tag{2.37}$$

通过上述数学模型和理论分析，可得到作用于轮胎的侧向力和力矩的

性质，即轮胎的侧偏特性会受到 E、v、I、b、d、k、l、μ 及 W 的影响。

E 和 v 取决于轮胎胎面的材质和构造；I、b、d 由轮胎的形状决定；W 为轮胎的垂直载荷；k 主要取决于轮胎的充气压力，可认为与气压成正比；l 主要取决于轮胎的形状，同时也受轮胎垂直载荷和轮胎充气压力的影响；μ 取决于轮胎胎面的材质和路面的状态。

因此，轮胎的侧偏特性主要受以下因素影响：

1）轮胎的材质、构造和形状。

2）轮胎的垂直载荷。

3）轮胎充气压力。

4）路面状态。

理论上计算上述四种因素对之前总结的各轮胎特性参数的影响并不容易，直接通过实验测量这些影响也不简单。然而，测量具有侧偏角或者外倾角的轮胎侧向力和力矩反倒是简易可行的。因此，通常通过直接的实验结果来证实上述四种因素对于轮胎侧偏特性的影响。

例题 2.1

通过分析轮胎侧向力引起轮胎侧向变形的机理，试估计侧向力饱和时所对应的轮胎侧偏角，并验证所估计的侧偏角与式(2.24)的表达相符。

题解：位于饱和点的侧向力等于 μW，其中 μ 为轮胎与路面间的摩擦系数，W 为轮胎的垂直载荷。根据式(2.5)，由侧向力而产生的轮胎胎面基底侧向位移可表示为

$$y = \frac{\alpha^3 l^2 \mu W}{2k} \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{E2.1}$$

在饱和点处，沿轮胎接触印迹分布的侧向力等于轮胎垂直载荷与摩擦系数 μ 的乘积，即

$$\mu p = 4\mu p_m \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{E2.2}$$

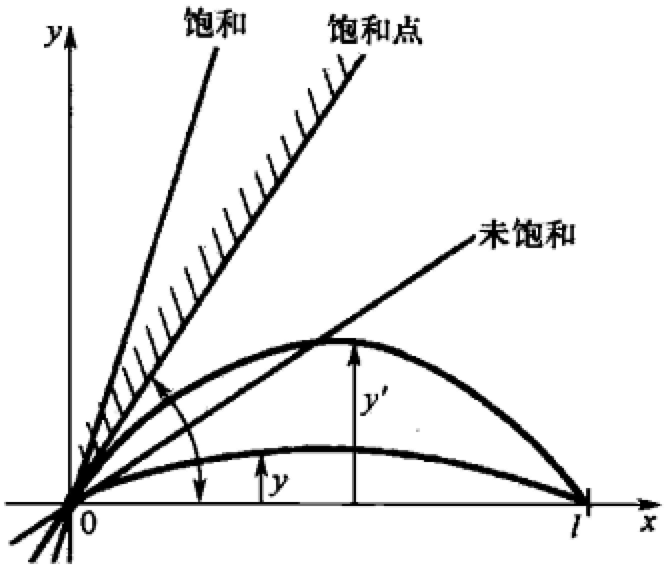
如例题 2.1 图所示，轮胎胎面基底的剪切变形表示为 $y' - y$，其中 y 为轮胎接触印迹的侧向变形。因此，可得如下关系式：

$$\mu pb = K_0(y' - y) \quad \text{(E2.3)}$$

由以上三式，可求得 y' 为：

$$y' = \left(\frac{\alpha^3 l^2 F}{2k} + \frac{4\mu p_m b}{K_0}\right)\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{(E2.4)}$$

以上求得的就是轮胎接触印迹每点处侧向变形的最大值。当 $x = 0$ 时，y' 的切线方向 dy/dx 即为侧向力达到最大时对应的轮胎侧偏角。因此，轮胎侧偏角可被描述为：



例题 2.1 图

$$\tan\beta = \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{\alpha^3 l^2 F}{2k} + \frac{4\mu p_m b}{K_0}\right)\frac{1}{l} \quad \text{(E2.5)}$$

结合式(2.8)、式(2.10)、式(2.16)和式(2.19)，可将上式转化为与式(2.24)相同的形式：

$$\tan\beta = \frac{3\mu W}{K}$$

从而验证了所估计的侧偏角与式(2.24)所表达的相符。

2.3.2 侧向力

本节将对给定材质和构造的轮胎，通过轮胎侧偏特性的实验验证，进一步地详细理解轮胎侧向力和力矩的特性。

1. 一般特性

正如前述的理论模型所预测，当侧偏角较小时，它与侧向力几乎呈线性关系。当侧偏角超过某一值后，侧向力的增加变得缓慢，并最终在 $\tan\beta = 3\mu W/K$ 处达到饱和。图 2.16 给出了一个普通的轿车用轮胎侧向力与其侧偏角之间的关系。

该例中，当 β 小于 4°左右时，侧向力是呈线性增加的。一旦超过此值，随着侧偏角的增加，其增加变得愈加缓慢，并最终在侧偏角为 8°～10°时达到饱和。而对一辆普通的轿车而言，其侧向运动通常是在线性区域范围内发生的。其线性部分的斜率即对应于式(2.30)

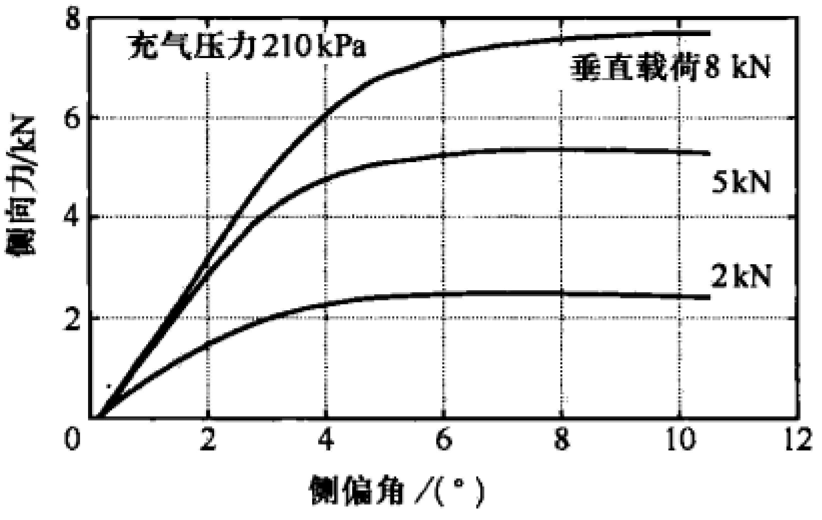


图 2.16 轮胎侧向力与侧偏角的关系

中的轮胎侧偏刚度，即单位侧偏角产生的轮胎侧向力，它是评价轮胎侧偏特性的一个重要参数。

2. 垂直载荷和路面条件的影响

轮胎垂直载荷对侧向力的影响如图 2.16 所示。当侧偏角很小时，轮胎垂直载荷对侧向力几乎没有影响。随着侧偏角的增大，侧向力的饱和值之间的差异逐渐变得显著。前面介绍的数学模型表明，只有在轮胎胎面基底与地面发生相对滑动的区域，轮胎垂直载荷才对侧向力产生影响。当接地区中产生这种相对滑动的部分较多时，即侧偏角很大时，轮胎侧向力的大小将接近于 μ 和 W 的乘积，因而垂直载荷的影响将十分明显。图 2.17 给出了一个轮胎垂直载荷影响轮胎侧向力的例子。

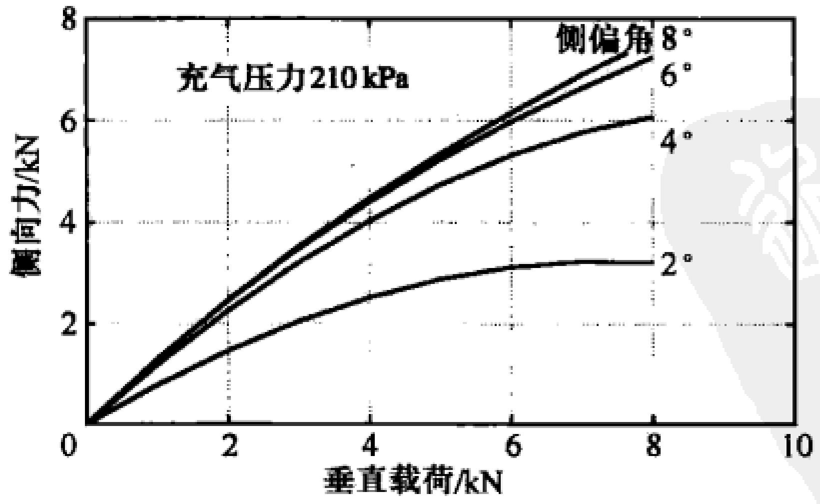


图 2.17 侧向力与侧偏角和垂直载荷的关系

接下来我们研究轮胎垂直载荷对轮胎侧偏刚度的影响。由图2.16可以看出，当轮胎载荷较小时，侧偏刚度随着载荷一起增加，但当载荷超出某一极限时，侧偏刚度可能会减小。

将侧偏刚度与此时的载荷相除所得的值，称为侧偏刚度系数。如图2.18所示，侧偏刚度系数随着轮胎载荷的增大而几乎呈线性地减小。因此，侧偏刚度与轮胎载荷的关系可写为

$$K = W(c - c_1 W) \tag{2.38}$$

式中，c 为载荷在零附近的侧偏刚度系数，c_1 为其载荷相关系数。

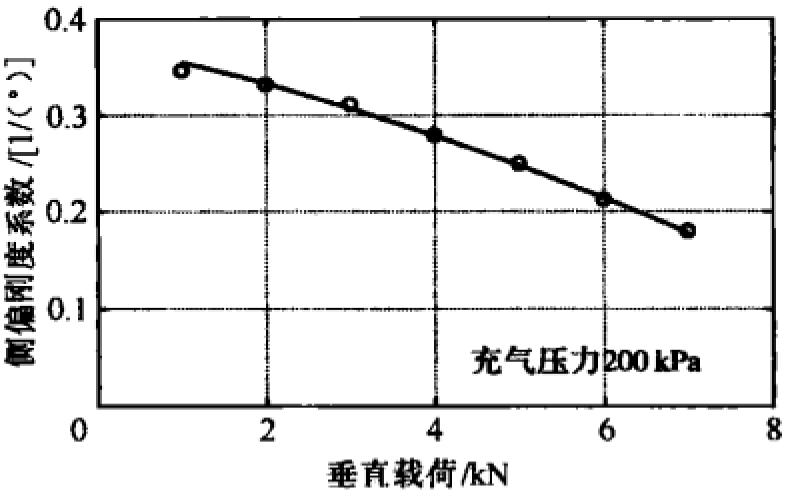


图2.18　垂直载荷对侧偏刚度系数的影响

轮胎侧偏刚度与轮胎载荷的关系曲线可近似为一条经过原点的抛物线。侧偏刚度先随着轮胎载荷的增大而增大至一个峰值，之后随着轮胎载荷的增大而减小。轮胎通常在侧偏刚度随载荷增加的范围内工作。

图2.19给出了一个实际的轮胎侧偏刚度随载荷的变化关系曲线，证

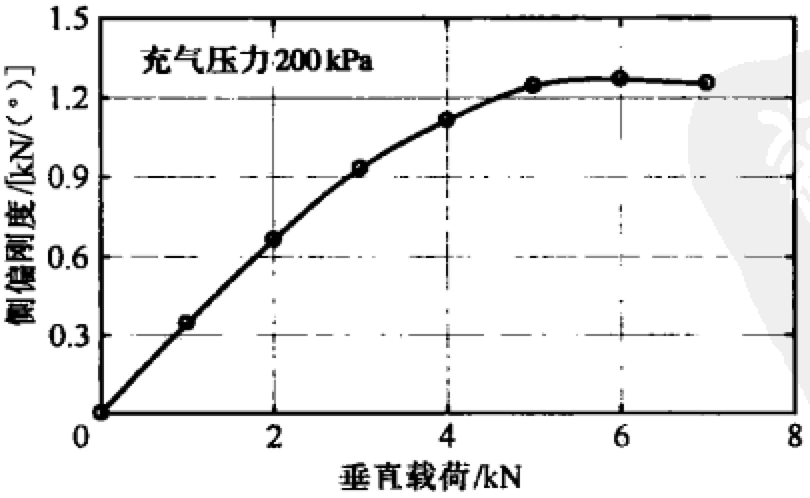


图2.19　垂直载荷对侧偏刚度的影响

实了二者的关系可近似为一条抛物线。

通常情况下，轮胎垂直载荷的影响以μW的形式来表述。轮胎胎面基底与路面间的摩擦系数μ的影响和垂直载荷相同。图2.20示意性地给出了随着轮胎侧偏角的变化，不同路面条件对侧向力的影响。

由图2.20可见，当侧偏角较小时，摩擦系数对侧向力几乎没有影响，而当侧偏角较大时则有显著影响。可见，摩擦系数对侧向力的影响与垂直载荷的影响相似。

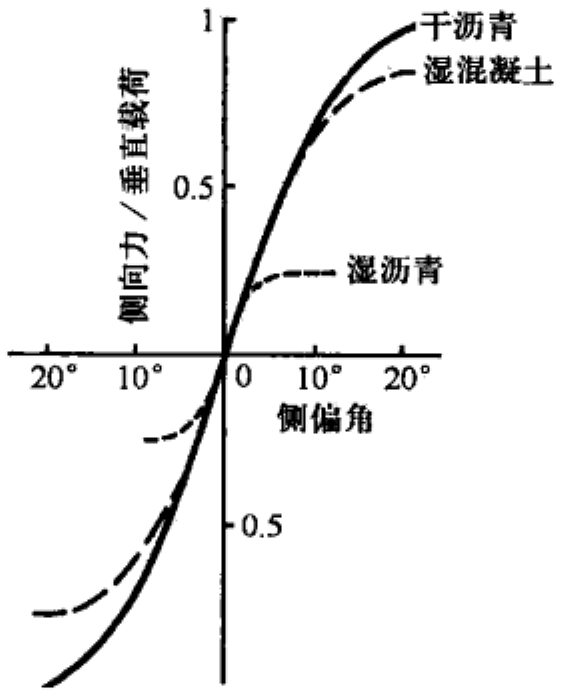


图2.20　路面对侧向力的影响

3. 胎压的影响

在前面的第2.3.1小节中，通过对轮胎数学模型的分析可清楚地得知，对某恒定的力而言，轮胎胎面基底的变形γ越小，则轮胎的侧向力越大。由式(2.5)可知，$\alpha^3 l^2/(2k)$的值越小，则γ值越大。如果弹性基础的弹簧常数k以及轮胎胎面基底的弯曲刚度EI越大，则轮胎胎面基底的变形就越小。由于弹簧常数k取决于轮胎充气压力，因此我们可以预测：侧偏力应该会随着轮胎充气压力的增大而增大。然而，增大轮胎充气压力会减小接地面长度l，而由式(2.15)可知，侧向力会随着接地区长度的减小而减小。

图2.21就是一个很好的例子，它表示了侧向力和轮胎充气压力之间的关系。一方面，k随着轮胎充气压力的增大而增大，侧向力应该增大；而另一方面，轮胎充气压力增大导致接地区长度l减小，会使侧向力减小。最终我们发现可以一个有趣的现象，即在图中所示的充气压力变动范围内，

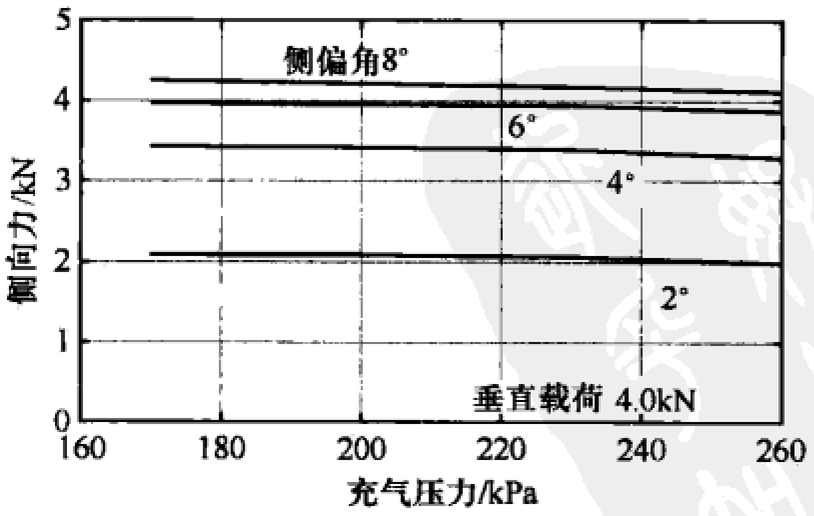


图2.21　轮胎充气压力对侧向力的影响

侧向力几乎恒定不变。

以上观点可以通过侧偏刚度和轮胎充气压力间的关系得到进一步证实，如图2.22所示。当垂直载荷相对较小时，接地区长度对侧向力的影响比弹簧常数k大，即此时的侧偏刚度随着轮胎充气压力的增大而减小；另一方面，当垂直载荷相对较大时，弹簧常数k对侧向力的影响接地区长度比大，即此时的侧偏刚度随着轮胎充气压力的增大而增大。然而，对于更大的垂直载荷，轮胎充气压力增大对接地区长度的影响更大，因而侧偏刚度会随着轮胎充气压力的增大而减小。上述观点可以通过式(2.30)来理解。

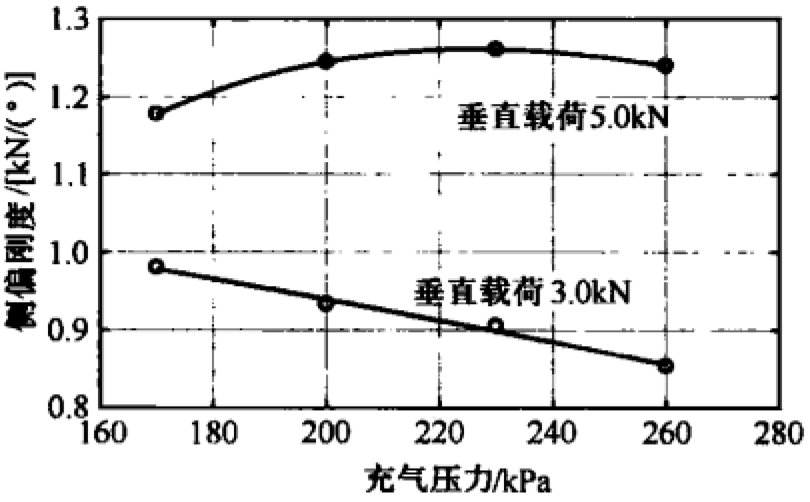


图2.22　轮胎充气压力对侧偏刚度的影响

4. 轮胎形状的影响

轮胎胎面基底的弯曲刚度EI由轮胎的形状决定。如果给定轮胎的材质和构造，则轮胎形状产生的影响主要取决于轮胎胎面基底的转动惯量I。通常，轮胎尺寸越大，I值越大。对于半径相同的轮胎，宽度大的扁平轮胎I值较大。因此，为了获得大的侧向力，我们希望将轮胎制造成扁平形状。

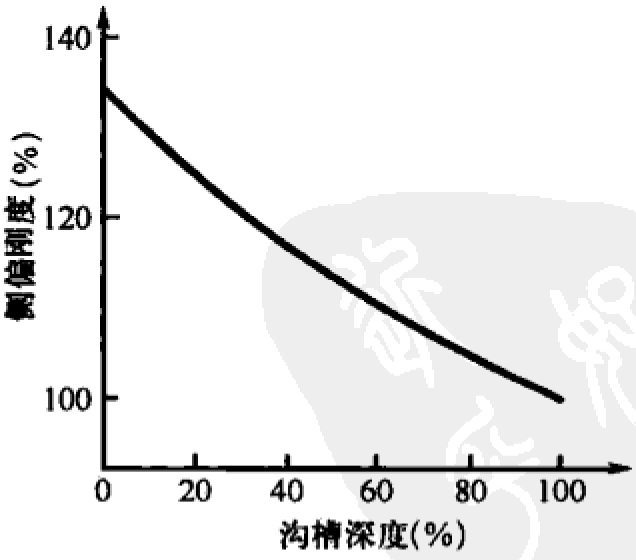


图2.23　轮胎胎面沟槽深度对侧偏刚度的影响

由式(2.30)可知，当b增大而d减小时，轮胎侧偏刚度增大。图2.23表示与轮胎胎面橡胶厚度相当的轮胎胎面沟槽深度与侧偏刚度的

关系。从图中可以看出，由于轮胎胎面磨损而使 d 等效减小的轮胎，其侧偏刚度将变大。

5. 驱动力和制动力的影响

前面已经考察了轮胎参数和垂直载荷对侧向力的影响。在制动或者驱动过程中，轮胎不仅会受到支撑车辆荷重的垂直载荷，还会在接地区处受到使车辆制动或者驱动的纵向力，后者也会影响轮胎的侧向力。

基于经典的摩擦定律，如图2.24所示，作用于轮胎上的侧向力 F 和驱动力(或者制动力) T 总是满足以下不等式：

$$\sqrt{F^2+T^2} \leqslant \mu W \qquad (2.39)$$

换言之，作用于轮胎与地面接触面内的水平合力不会超出其垂直载荷与摩擦系数的乘积。这表明，合力的矢量只能位于半径为 μW 的圆内，我们称此圆为摩擦圆。

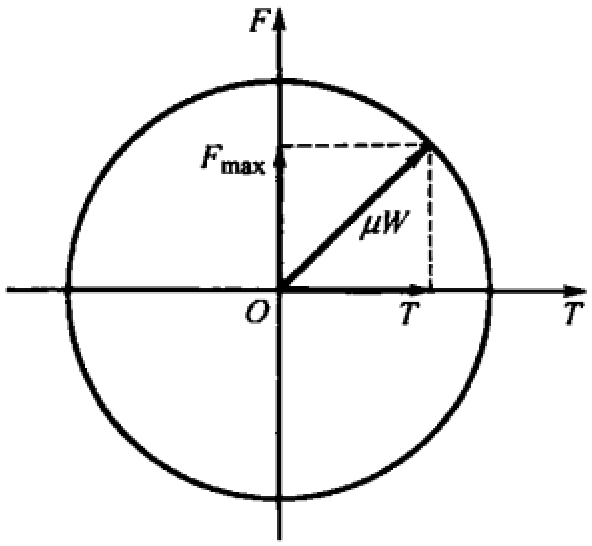


图2.24 摩擦圆

如果轮胎在纵向受到驱动力或者制动力的作用时，则在大侧偏角下时能达到的最大侧向力为

$$F_{max} = \sqrt{\mu^2 W^2 - T^2} \qquad (2.40)$$

而且若 $T=0$，则上式与式(2.25)相一致。

当驱动力或者制动力为零时，侧向力 F_0 与侧偏角的关系由图2.25中的曲线段 $O\text{-}A_0$ 给出；当驱动力(或者制动力)作用时，侧向力与侧偏角的关系则由图中的曲线段 $O\text{-}A$ 给出。假设不论侧偏角如何，即在任何值时由驱动力(或者制动力)引起的侧向力的下降率是相同的，则有下式成立：

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\sqrt{\mu^2 W^2 - T^2}}{\mu W} \qquad (2.41)$$

或者

$$\left(\frac{T}{\mu W}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_0}\right)^2 = 1 \qquad (2.42)$$

表明对给定的侧偏角而言，侧向力 F 与驱动力(或者制动力) T 的关系曲线为一椭圆。在侧向力取最大值所对应的侧偏角处，该椭圆与之前所示的摩擦圆一致。图 2.25 表明了 F 与 T 满足椭圆关系的情形。

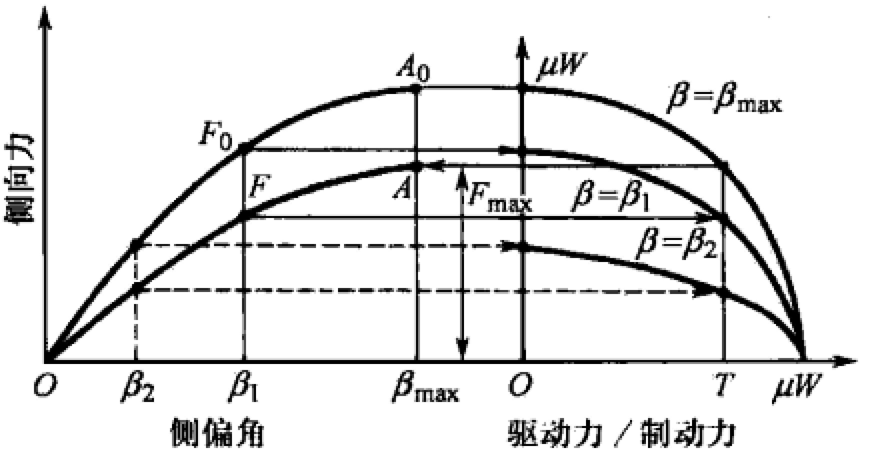


图 2.25　驱动力/制动力与侧向力的关系

有关驱动力和制动力对侧向力的影响，已进行了很多的研究。图 2.26 为一个实际测得的例子，或许可用来理解上述摩擦圆的概念。

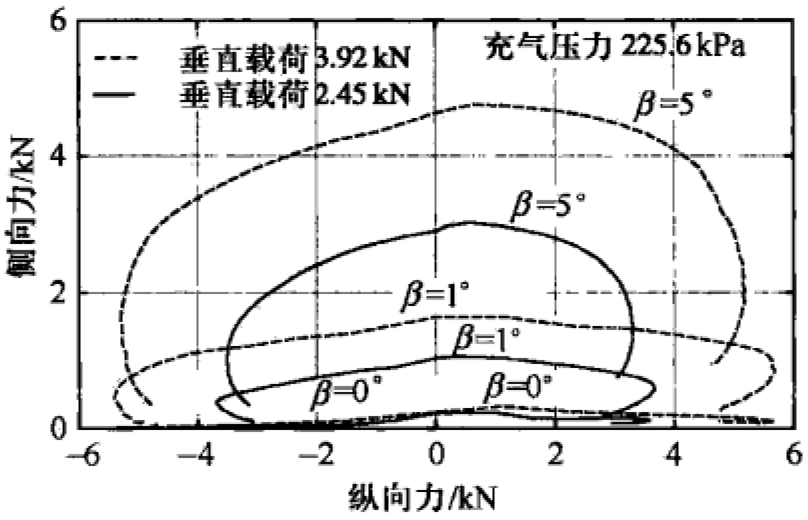


图 2.26　有驱动力和制动力作用时的侧向力

2.3.3　自回正力矩

根据数学模型所进行的理论分析表明，当侧偏角较小时，回正力矩随着侧偏角线性增加；而随着侧偏角增大，回正力矩趋于饱和并达到某一特定峰值，随后便开始随着侧偏角的增大而减小。

对一个真实的轮胎，其侧偏角与回正力矩之间关系的典型实例由图 2.27 给出。

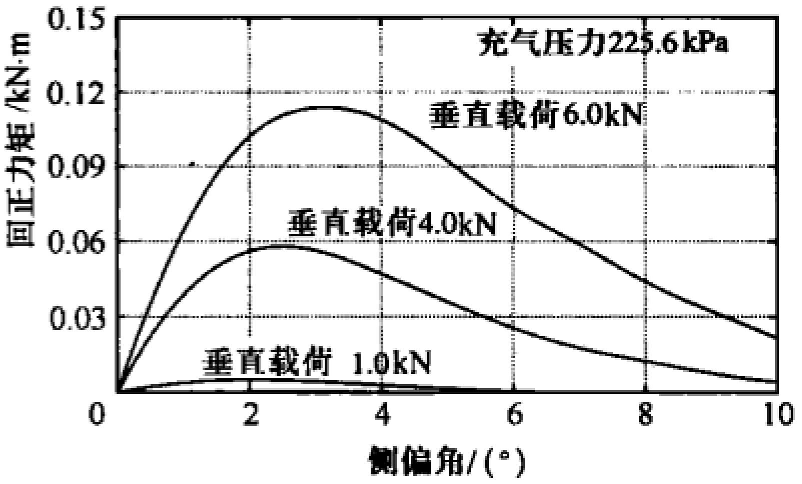


图 2.27 回正力矩与侧偏角的关系

图 2.27 表明了不同侧偏角情况下，轮胎垂直载荷对回正力矩的影响。当侧偏角较小时，轮胎垂直载荷对侧向力的影响较小，而在侧偏角较大的情况下影响较明显。与此相对的是，不论侧偏角如何，轮胎垂直载荷对回正力矩的影响都很大。一个原因就是，垂直载荷的影响发生在轮胎接地区与胎面橡胶之间存在相对滑动的范围内，而回正力矩本身也特别受作用于接地区前、后两端的侧向力的影响。另一个原因是，轮胎垂直载荷的增大会导致接地区长度的增大，从而使得由侧向力产生的力矩也随之增加。这点或许可以由式(2.18)得到验证，我们看到其中包含有 l 的三次项或更高次项。

如果增大轮胎充气压力，则如前面所述，在某些情况下侧向力会增大，从而回正力矩也会增大。然而，对一个真实的轮胎而言，其回正力矩会随着轮胎充气压力的增大而减小。原因是：虽然侧向力随着轮胎充气压力的增大而增大，但与此同时，接地区长度也减小了，这会对回正力矩的大小产生很大影响。回正力矩随着轮胎充气压力的减小而增大，但若轮胎充气压力低于某个值时，回正力矩便不再增大了。原因是如果轮胎充气压力太小时，侧向力的减小对回正力矩的影响更明显。

回正力矩是侧向力绕过接地点中心的铅垂轴的力矩。轮胎拖距的定义如图 2.13 所示。利用式(2.22)和式(2.23)，可得到图 2.28 所示的 $\xi_n = M/F$ 与 ψ 之间的关系。由图可见，一旦侧偏角增大，ξ_n 的值就会急剧减小。

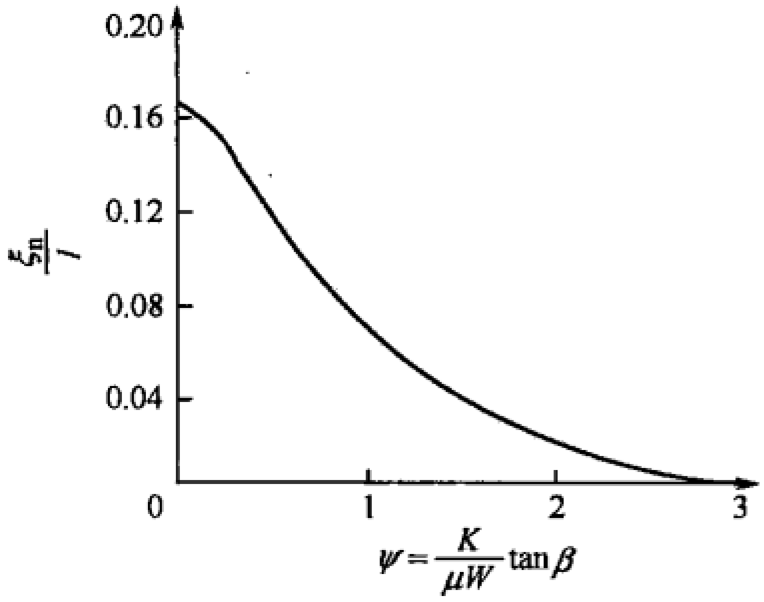


图 2.28　轮胎拖距对侧偏角的影响

2.3.4　外倾侧向力

由式(2.36)可知，当侧偏角为零时，轮胎的外倾侧向力与外倾角成正比。图 2.29 给出了一个普通轮胎外倾角与外倾侧向力之间关系的实例。该实例表明，外倾侧向力与外倾角成正比。此外，该图还表明了轮胎垂直载荷对外倾侧向力的影响。从图中可以看出，外倾侧向力系数(即单位外倾角对应的外倾侧向力)几乎随着轮胎垂直载荷呈线性增大。如图 2.14 所示，轮胎胎面基底的有效半径 R_0 与轮胎垂直载荷 W 有关，其关系由式(2.33)确定。接地区长度也随轮胎载荷的增大而增大。由式(2.37)可知，外倾侧向力系数取决于垂直载荷，

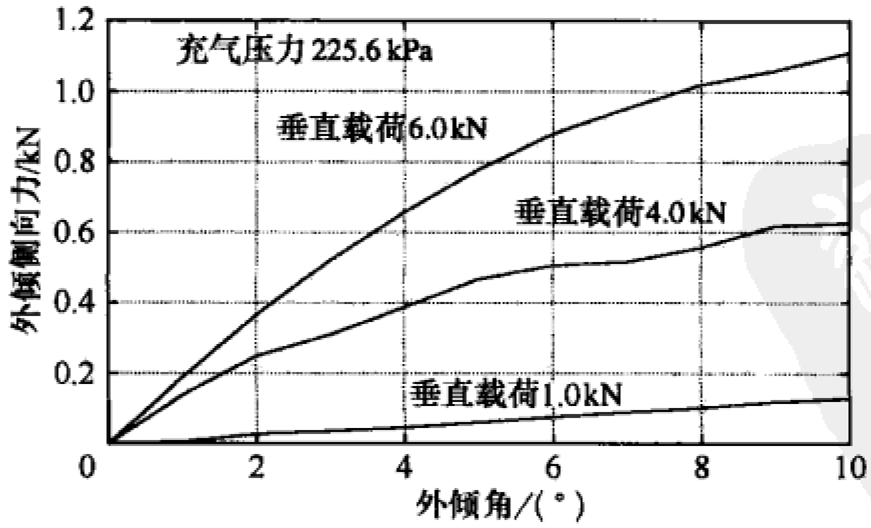


图 2.29　外倾侧向力与外倾角的关系

并随着垂直载荷的增大而增大。该式还可得出，外倾侧向力系数等于侧偏刚度与 $l/6R_0$ 的乘积。那么，我们就可以假定外倾侧向力系数与侧偏刚度具有相似的特性。由于轮胎接地区长度 l 和有效半径 R_0 的比值 l/R_0 通常在 0.3 左右，因此外倾侧向力系数通常小于侧偏刚度的十分之一。

至此，我们考察了由侧偏角引起的外倾侧向力和侧向力。但普通车辆的轮胎在行驶中通常是同时有侧偏角和外倾角的。在这种情况下，侧向力和外倾侧向力可看成是各自独立作用的。

图 2.30 是 Ellis[2] 提出的侧偏角和外倾角共同作用产生侧向力的一个例子。图中的曲线表明了不同侧偏角情况下，外倾角与侧向力的关系；同时表明不同外倾角下，侧偏角与侧向力的关系曲线分别互相平行。以上表明，由外倾角和侧偏角产生的作用于轮胎上的侧向力可各自、独立地进行处理。

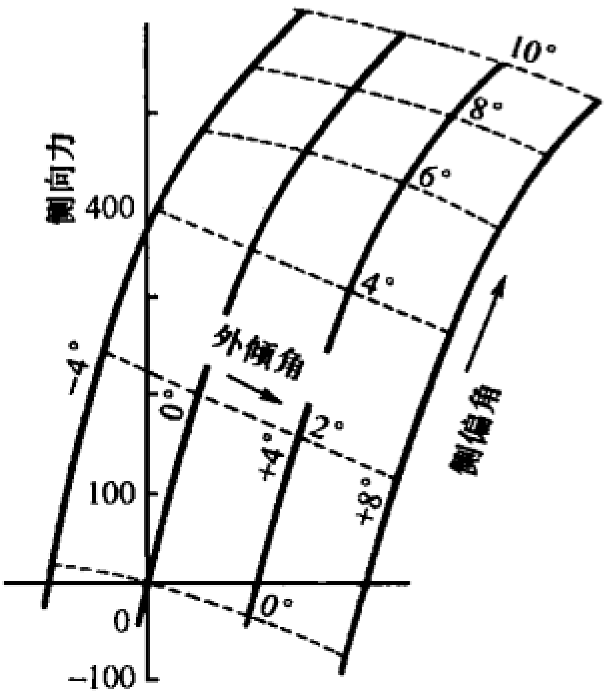


图 2.30 外倾角对轮胎侧向力的影响

近年来，特别在轿车上，通常使用扁平轮胎。当发生外倾时，扁平轮胎接地区内轮胎载荷的侧向分布很容易形成内侧轮胎载荷大而外侧载荷小的不均匀分布。在此不均匀分布的情况下，轮胎所产生的侧向力要小于均匀分布的情况。这点也可以从以下事实推测而得：侧向力和侧偏刚度对载荷的相关性如图 2.17 和图 2.19 中的抛物线所示，由图可见，由轮胎载荷减小引起的侧向力的下降，比由轮胎载荷增大而引起侧向力的上升更多。

因此，即使通过加入外倾角使得由侧偏角引起的外倾侧向力和侧向力是同一方向的，但由于外倾角会引起轮胎载荷分布发生变化，从而会进一步导致侧向力的减小，因而由侧偏角和外倾角引起的总侧向力也会减小。

为了全面地理解上述现象，图 2. 31 给出了一个卡丁车扁平轮胎的研究结果来加以说明。

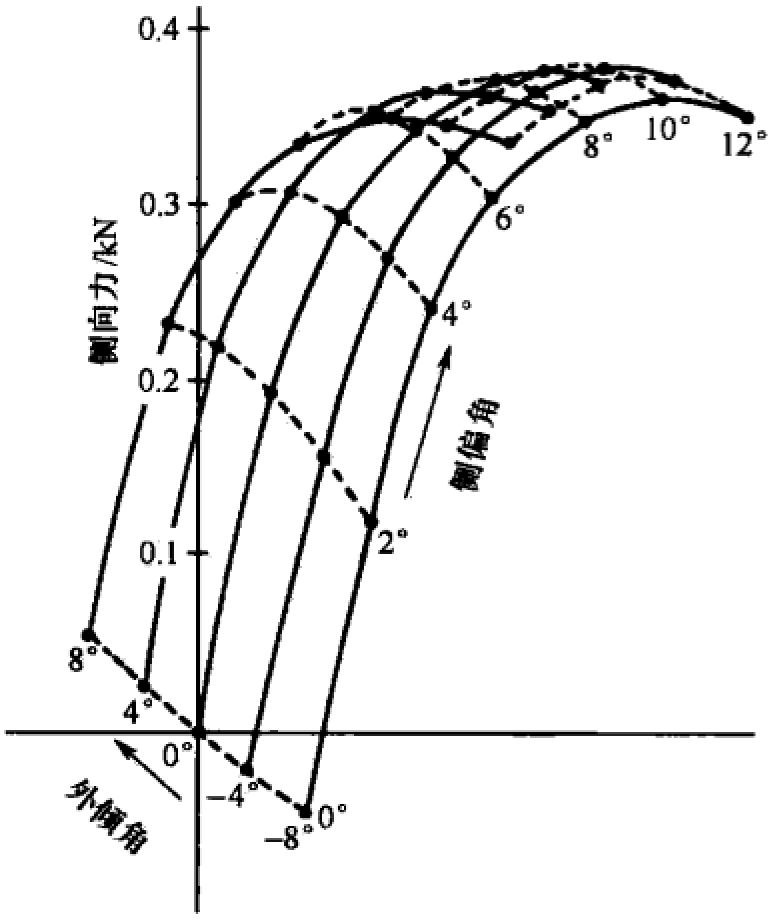


图 2. 31　低扁平率卡丁车轮胎的外倾角对其侧向力的影响

2. 4　驱动和制动情况下轮胎的侧偏特性

2. 4. 1　数学模型

第 2. 3. 1 小节中，我们已根据 Fiala 理论解释了轮胎的侧偏特性。所采用的数学模型假设：伴随着轮胎侧向滑动，其胎面基底相对于其轮辋发生侧向弹性变形，同时胎面橡胶相对于胎面基底进一步发生侧向弹性变形。

同样采用这个数学模型，我们可以考察纵向力(如驱动力和制动力)的影响，但模型会变得过于复杂。取而代之的是，根据图 2. 32 表示的轮胎胎面橡胶环绕刚性轮辋的情形，我们将轮胎胎面基底作为唯一的弹性部分。这样的轮胎模型允许同时在纵向和侧向考察弹性变

形。与前面的模型相似，认为这个轮胎胎面橡胶并非环状的连续体，而是由沿轮胎周向的独立的无数弹性体组成的。我们称该轮胎模型为刷子模型。

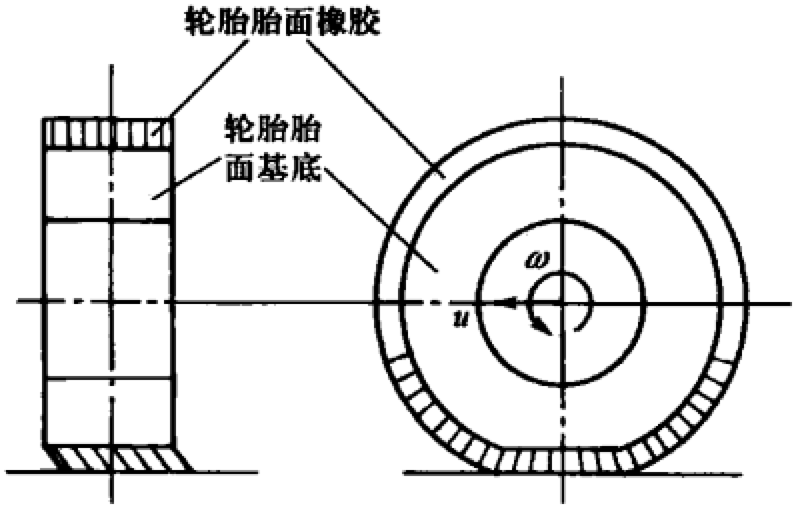


图 2.32 轮胎在横向和纵向的变形情况

下面我们采用这个轮胎模型，从理论上理解轮胎在纵向及侧向产生的力[3]。

2.4.2 驱动和制动情况下轮胎的侧向力

如图 2.33 所示，设轮胎以角速度 ω 旋转，并同时沿与其回转平面成 β 角的方向行驶，其回转面方向的速度分量为 u。我们称作用于轮胎的三个力分别为纵向力 F_x、侧向力 F_y 和垂向力 F_z。

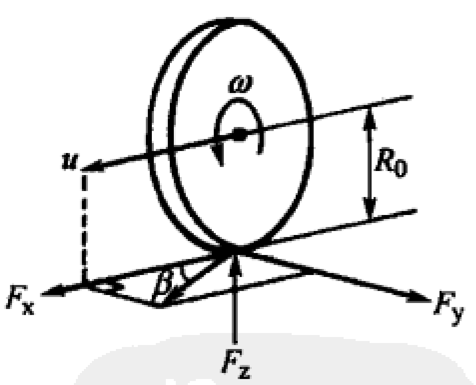


图 2.33 在三个方向上的轮胎受力

1. 制动情况下

如图 2.34 所示，设轮胎接地区中心线的前端为坐标原点，并取纵向为 x 轴、侧向为 y 轴。另设 O 点正上方的轮胎胎面基底处的点为 O'。经过时间 Δt，接地点从 O 点移动到 P 点，轮胎胎面基底的点从 O' 点移动到 P' 点。将 P' 点在 x 轴上的投影记为 P'' 点。

在 Δt 时间内，自 O 点进入的接地点在 x 轴方向上前进的距离，即 P 点的 x 坐标为

$$x = u\Delta t \tag{2.43}$$

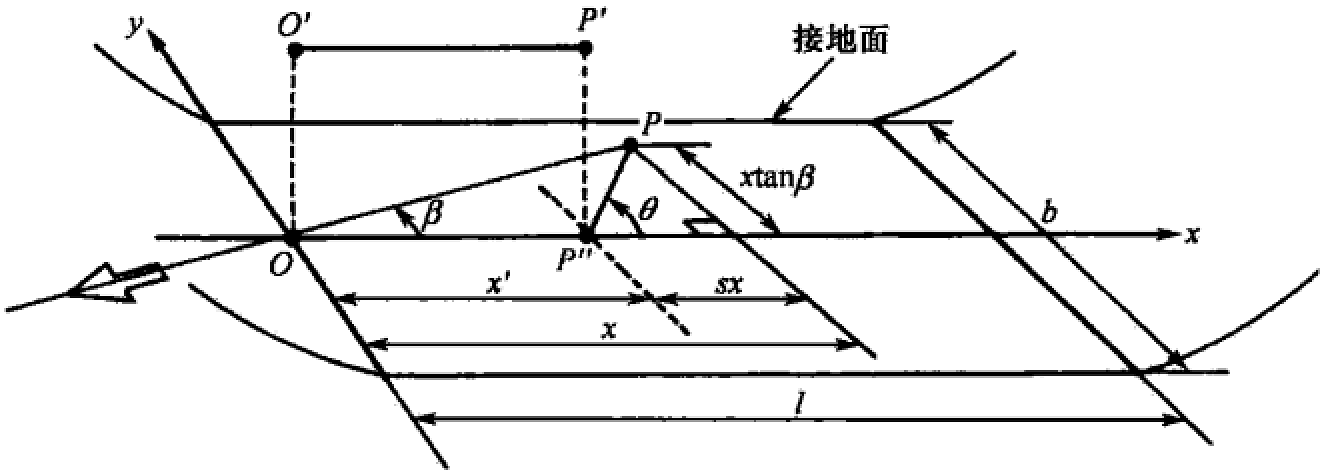


图 2.34　轮胎接地面处的变形

自 O' 点进入的点 P'' 的 x 坐标为

$$x' = R_0\omega\Delta t \tag{2.44}$$

因此，P 点和 P' 点在 x 方向上的相对位移，即轮胎胎面橡胶的变形为

$$\begin{aligned} x - x' &= \frac{u - R_0\omega}{u}u\Delta t \\ &= sx \\ &= \frac{s}{1-s}x' \end{aligned} \tag{2.45}$$

这里的 s 为轮胎纵向滑移率，等于：

$$s = \frac{u - R_0\omega}{u} \tag{2.46}$$

并且自 O 点进入的接地点在 y 方向上的位移，即 P 点的 y 坐标为

$$y = x\tan\beta = \frac{\tan\beta}{1-s}x' \tag{2.47}$$

由于 P' 点在 y 方向上无位移，因而它就是轮胎胎面橡胶在 y 方向上的变形。

因此，作用于 P 点每单位长度在 x 方向的力 σ_x 和每单位宽度在 y 方向上的力 σ_y 分别为

$$\sigma_x = -K_x(x - x') = -K_x\frac{s}{1-s}x' \tag{2.48}$$

$$\sigma_y = -K_y y = -K_y\frac{\tan\beta}{1-s}x' \tag{2.49}$$

式中，力的正负号与 x 轴和 y 轴的正负方向相反。此外，二者合力的

大小为

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \\ &= \sqrt{K_x^2 s^2 + K_y^2 \tan^2\beta}\frac{x'}{1-s}\end{aligned} \tag{2.50}$$

式中，K_x 为轮胎胎面橡胶单位长度的纵向刚度；K_y 为单位宽度的侧向刚度。

当轮胎产生纵向滑移率及侧偏角后，轮胎会发生变形。结果形成与 x'成比例的轮胎接地区力的分布。

设轮胎接地压力分布与第 2. 3. 1 小节中的相同，有

$$p = \frac{6F_z}{bl}\frac{x'}{l}\left(1 - \frac{x'}{l}\right) \tag{2.51}$$

如图 2. 35 所示，在 $0 \leqslant x' \leqslant x_s'$ 的附着区范围内，作用于轮胎接地区的力由式(2. 50)表示；在 $x' \geqslant x_s'$ 的滑移区范围内则以 μp 表示。

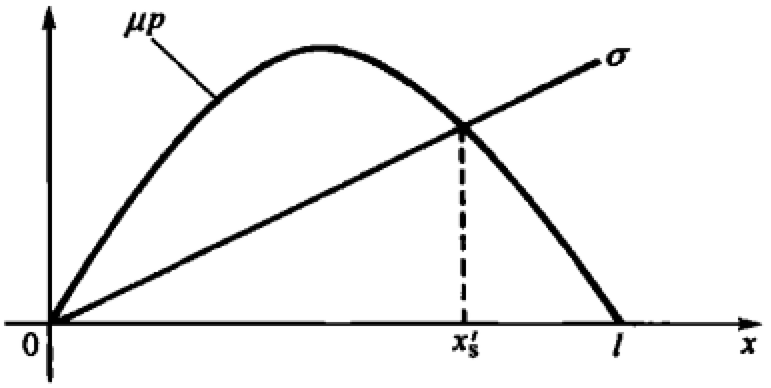


图 2. 35　轮胎接地面力的分布

在附着区范围内，作用于接地区 x 方向和 y 方向上的力分别为 σ_x 和 σ_y；在滑移区范围内，相应的作用力则分别为 $\mu p\cos\theta$ 和 $\mu p\sin\theta$，这里的 θ 决定了轮胎侧滑的方向。

将 $\sigma = \mu p$ 代入式(2. 50)和式(2. 51)中，求解 x_s'，并假设一个无量纲量 ξ_s 为

$$\xi_s = \frac{x_s'}{l} = 1 - \frac{K_s}{3\mu F_z}\frac{\lambda}{1-s} \tag{2.52}$$

其中，

$$\lambda = \sqrt{s^2 + \left(\frac{K_\beta}{K_s}\right)^2 \tan^2\beta} \tag{2.53}$$

$$K_s = \frac{bl^2}{2}K_x,\ K_\beta = \frac{bl^2}{2}K_y \tag{2.54}$$

由上可知，作用于轮胎整个接地面在 x 方向和 y 方向上的力表述如下：

当 $\xi_s > 0$ 时，对由附着区和滑移区组成的接地区，有

$$F_x = b\left(\int_0^{x_s'} \sigma_x \mathrm{d}x' + \int_{x_s'}^{l} -\mu p \cos\theta \mathrm{d}x'\right) \tag{2.55}$$

$$F_y = b\left(\int_0^{x_s'} \sigma_y \mathrm{d}x' + \int_{x_s'}^{l} -\mu p \sin\theta \mathrm{d}x'\right) \tag{2.56}$$

而当 $\xi_s \leqslant 0$ 时，即对只存在滑移区的接地面，有

$$F_x = b\int_0^l -\mu p \cos\theta \mathrm{d}x' \tag{2.55'}$$

$$F_y = b\int_0^l -\mu p \sin\theta \mathrm{d}x' \tag{2.56'}$$

将式(2.50)~式(2.52)代入式(2.55′)~式(2.56′)，可求得 F_x 和 F_y 如下：

当

$$\xi_s = 1 - \frac{K_s}{3\mu F_z}\frac{\lambda}{1-s} > 0$$

则，

$$F_x = -\frac{K_s s}{1-s}\xi_s^2 - 6\mu F_z \cos\theta\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi_s^2 + \frac{1}{3}\xi_s^3\right) \tag{2.57}$$

$$F_y = -\frac{K_\beta \tan\beta}{1-s}\xi_s^2 - 6\mu F_z \sin\theta\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi_s^2 + \frac{1}{3}\xi_s^3\right) \tag{2.58}$$

当

$$\xi_s = 1 - \frac{K_s}{3\mu F_z}\frac{\lambda}{1-s} < 0$$

则，

$$F_x = -\mu F_z \cos\theta \tag{2.57'}$$

$$F_y = -\mu F_z \sin\theta \tag{2.58'}$$

这里，假定滑移力的方向 θ 近似为滑动起始点处的滑移方向，即

$$\tan\theta = \frac{K_y \dfrac{\tan\beta}{1-s}x'}{K_x \dfrac{s}{1-s}x'} = \frac{K_\beta \tan\beta}{K_s s} \tag{2.59}$$

故得：

$$\cos\theta = \frac{s}{\lambda} \tag{2.60}$$

$$\sin\theta = \frac{K_\beta \tan\beta}{K_s \lambda} \tag{2.61}$$

由式(2.54)定义的 K_s 相当于在 $\beta=0$、$s\to0$ 时单位纵向滑移率所对应的纵向力的总和；而 K_β 相当于 $\beta\to0$、$s=0$ 时单位侧偏角对应的侧向力的总和。以上结论也可在 K_s 和 K_β 很小且 $\beta=0$ 或 $s=0$ 时，通过对接地区的作用力积分得到。式(2.57)和式(2.58)分别证实了 $(\partial F_x/\partial s)_{s=0,\beta=0}=K_s$、$(\partial F_y/\partial\beta)_{s=0,\beta=0}=K_\beta$。因此，如果要用我们描述的模型将 F_x 和 F_y 用于数值模拟，一个实际的做法是，依照轮胎垂直载荷、根据实验来确定 K_s 和 K_β。

由于摩擦系数 μ 是轮胎垂直载荷 F_z 和滑移速度 V_s 的函数，因此期望有一个能反映 μ 对轮胎载荷和滑移速度的经验公式。这里，我们定义 V_s 为

$$V_s = \sqrt{(u-R_0\omega)^2+\mu^2\tan^2\beta} = u\sqrt{s^2+\tan^2\beta} \tag{2.62}$$

如式(2.63)所示，作为纵向滑移率 s、侧偏角 β、轮胎载荷 F_z 和轮胎行驶速度 u 的函数，轮胎的纵向力和侧向力可以通过数值求解获得，即

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(s,\beta,F_z,u) \\ F_y &= F_y(s,\beta,F_z,u) \end{aligned} \tag{2.63}$$

2. 驱动情况下

与制动时相同，考虑轮胎胎面橡胶相对于轮胎胎面基底的变形，则有

$$x - x' = \frac{u-R_0\omega}{u}R_0\omega\Delta t = sx' \tag{2.64}$$

$$y = x\tan\beta = (1+s)\tan\beta x' \tag{2.65}$$

式中，s 为加速过程中轮胎的纵向滑动率。

$$s=\frac{u-R_0\omega}{R_0\omega} \tag{2.66}$$

故有

$$\sigma_x=-K_x s x' \tag{2.67}$$

$$\sigma_y=-K_y(1+s)\tan\beta x' \tag{2.68}$$

$$\sigma=\sqrt{K_x^2 s^2+K_y^2(1+s)^2\tan^2\beta x'} \tag{2.69}$$

参照制动时的情况，由下述公式求出附着区和滑动区的边界点：

$$\xi_s=\frac{x_s'}{l}=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\lambda \tag{2.70}$$

$$\lambda=\sqrt{s^2+\left(\frac{K_\beta}{K_s}\right)^2(1+s)^2\tan^2\beta} \tag{2.71}$$

在加速情况下，推导得出在 x 方向和 y 方向作用于轮胎接地区的力如下：

当

$$\xi_s=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\lambda>0\text{ 时，}$$

则，

$$F_x=-K_s s\xi_s^2-6\mu F_z\cos\theta\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi_s^2+\frac{1}{3}\xi_s^3\right) \tag{2.72}$$

$$F_y=-K_\beta(1+s)\tan\beta\xi_s^2-6\mu F_z\sin\theta\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi_s^2+\frac{1}{3}\xi_s^3\right) \tag{2.73}$$

当

$$\xi_s=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\lambda<0\text{ 时，}$$

则，

$$F_x=-\mu F_z\cos\theta \tag{2.72'}$$

$$F_y=-\mu F_z\sin\theta \tag{2.73'}$$

其中，

$$\tan\theta=\frac{K_y(1+s)\tan\beta x'}{K_x s x'}=\frac{K_\beta\tan\beta(1+s)}{K_s s} \tag{2.74}$$

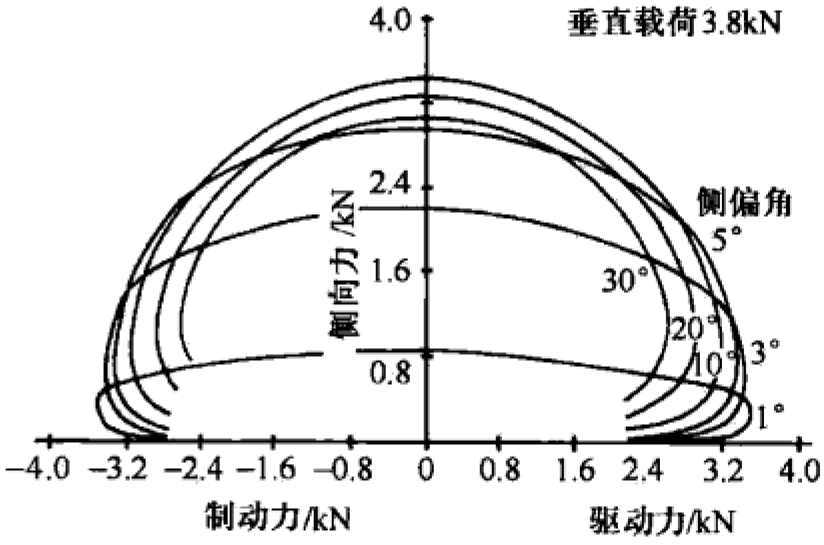
$$\cos\theta = \frac{s}{\lambda} \tag{2.75}$$

$$\sin\theta = \frac{K_{\beta}\tan\beta(1+s)}{K_{s}\lambda} \tag{2.76}$$

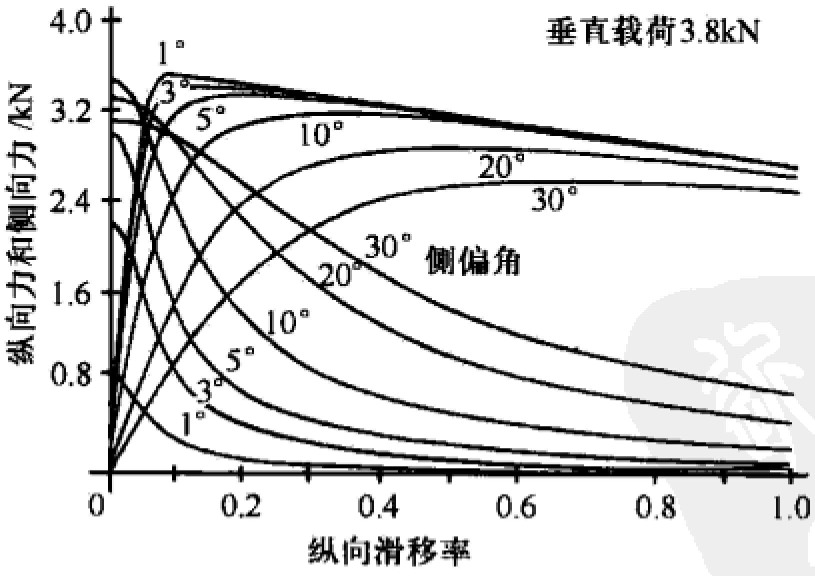
并且滑动速度为

$$V_{s} = u\sqrt{\frac{s^{2}}{(1+s)^{2}} + \tan^{2}\beta} \tag{2.77}$$

以式(2.57)～式(2.58′)及式(2.72)～式(2.73′)求得的驱动和制动时作用于侧滑轮胎的纵向力和侧向力由图2.36所示。清晰地可见，



a)



b)

图2.36 侧向力与纵向力之间的相互作用和侧向力/纵向力与纵向滑移率的关系

a）侧向力与纵向力之间的相互作用

b）侧向力/纵向力与纵向滑移率的关系

这里所进行的理论分析很好地解释了在第2.3.2小节第五部分中所述的关于驱动力和制动力对轮胎侧偏特性的影响。

2.4.3 驱动和制动情况下轮胎的回正力矩

如第2.3.1小节所述，作用于接地区的侧向力相对于接地面中心是非对称的。因此，会产生一个绕轮胎接地面中心铅垂轴的力矩。当纵向力和侧向力同时作用时，由于轮胎的侧向变形，纵向力的作用点与轮胎中心线之间将产生偏离，并产生一个由纵向力引起的一个回正力矩。这些力矩的总和即为回正力矩。

作用于接地区某点单位宽度、单位长度的力 σ_x 和 σ_y 如图2.37所示。

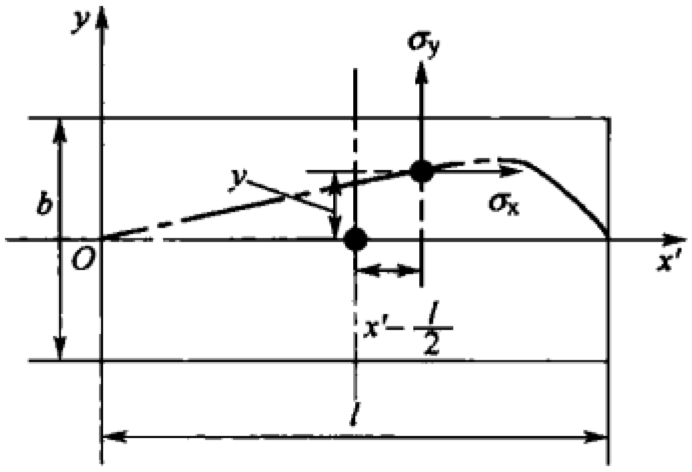


图2.37 轮胎接地面上的侧向力和纵向力

上述的回正力矩可写成绕 P 点的力矩总和，即：

$$M = b\int_0^l \left[\left(x' - \frac{1}{2}\right)\sigma_y - y\sigma_x\right] dx' \tag{2.78}$$

将接地区划分为附着区和滑动区，并将式(2.78)具体化，则有：

$$\begin{aligned} M = & b\left[\int_0^{x_s'}\left(x' - \frac{l}{2}\right)\sigma_y dx' + \int_{x_s'}^{l}\left(x' - \frac{l}{2}\right)(-\mu p\sin\theta)dx'\right] \\ & - b\left[\int_0^{x_s'} y\sigma_x dx' + \int_{x_s'}^{l}\frac{\mu p\sin\theta}{K_y}(-\mu p\cos\theta)dx'\right] \end{aligned} \tag{2.79}$$

式(2.79)中的第1、2项的积分表示由侧向力引起的回正力矩，而第3、4项的积分则表示由纵向力引起的回正力矩。

利用式(2.47)~式(2.49)或者式(2.65)、式(2.67)、式(2.68)

和式(2.51)，可积分求解得到回正力矩，具体如下：

1. 制动情况下($s>0$)

当 $\xi_s=\frac{x_s'}{l}=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\frac{\lambda}{1-s}\geqslant 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
M &= b\Big[\int_0^{x_s'}-\frac{K_y\tan\beta}{1-s}\Big(x'-\frac{l}{2}\Big)x'\mathrm{d}x' \\
&\quad -\int_{x_s'}^{l}\frac{6\mu F_z\sin\theta}{bl}\Big(x'-\frac{l}{2}\Big)\frac{x'}{l}\Big(1-\frac{x'}{l}\Big)\mathrm{d}x'\Big]-b\Big[\int_0^{x_s'}\frac{K_x s\tan\beta}{(1-s)^2}x'^2\mathrm{d}x' \\
&\quad +\int_{x_s'}^{l}\Big(\frac{6\mu F_z}{bl}\Big)^2\frac{\sin\theta\cos\theta}{K_y}\Big(\frac{x'}{l}\Big)^2\Big(1-\frac{x'}{l}\Big)^2\mathrm{d}x'\Big] \\
&=\frac{lK_\beta\tan\beta}{2(1-s)}\xi_s^2\Big(1-\frac{4}{3}\xi_s\Big)-\frac{3}{2}l\mu F_z\sin\theta\xi_s^2(1-\xi_s)^2+\frac{2lK_s s\tan\beta}{3(1-s)^2}\xi_s^3 \\
&\quad +\frac{3l(\mu F_z)^2\sin\theta\cos\theta}{5K_\beta}(1-10\xi_s^3+15\xi_s^4-6\xi_s^5)
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

当 $\xi_s=\frac{x_s'}{l}=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\frac{\lambda}{1-s}<0$ 时，

$$
\begin{aligned}
M &= -b\int_0^{l}\frac{6\mu F_z\sin\theta}{bl}\Big(x'-\frac{l}{2}\Big)\frac{x'}{l}\Big(1-\frac{x'}{l}\Big)\mathrm{d}x'+b\int_0^{l}\Big(\frac{6\mu F_z}{bl}\Big)^2 \\
&\quad \times\frac{\sin\vartheta\cos\theta}{K_y}\Big(\frac{x'}{l}\Big)^2\Big(1-\frac{x'}{l}\Big)^2\mathrm{d}x' \\
&=\frac{3l(\mu F_z)^2\sin\theta\cos\theta}{5K_\beta}
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

2. 加速情况下($s<0$)

当 $\xi_s=\frac{x_s'}{l}=1-\frac{K_s}{3\mu F_z}\lambda\geqslant 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
M &= b\Big[\int_0^{x_s'}-K_y(1+s)\tan\beta\Big(x'-\frac{l}{2}\Big)x'\mathrm{d}x' \\
&\quad -\int_{x_s'}^{l}\frac{6\mu F_z\sin\theta}{bl}\Big(x'-\frac{l}{2}\Big)\frac{x'}{l}\Big(1-\frac{x'}{l}\Big)\mathrm{d}x'\Big] \\
&\quad -b\Big[\int_0^{x_s'}K_x(1+s)s\tan\beta x'^2\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

$$+\int_{x_s'}^{l}\left(\frac{6\mu F_z}{bl}\right)^2\frac{\sin\theta\cos\theta}{K_y}\left(\frac{x'}{l}\right)^2\left(1-\frac{x'}{l}\right)^2\mathrm{d}x'\Big]$$

$$=\frac{l}{2}K_\beta(1+s)\tan\beta\xi_s^2\left(1-\frac{4}{3}\xi_s\right)-\frac{3}{2}l\mu F_z\sin\theta\xi_s^2(1-\xi_s)^2$$

$$+\frac{2}{3}lk_s(1+s)s\tan\beta\xi_s^3+\frac{3l(\mu F_z)^2\sin\theta\cos\theta}{5K_\beta}(1-10\xi_s^3+15\xi_s^4-6\xi_s^5) \tag{2.82}$$

当 $\xi_s=\dfrac{x_s'}{l}=1-\dfrac{K_s}{3\mu F_z}\lambda<0$ 时，

$$M=-b\int_0^l\frac{6\mu F_z\sin\theta}{bl}\left(x'-\frac{l}{2}\right)\frac{x'}{l}\left(1-\frac{x'}{l}\right)\mathrm{d}x'+b\int_0^l\left(\frac{6\mu F_z}{bl}\right)^2$$

$$\times\frac{\sin\vartheta\cos\theta}{K_y}\left(\frac{x'}{l}\right)^2\left(1-\frac{x'}{l}\right)^2\mathrm{d}x'$$

$$=\frac{3l(\mu F_z)^2\sin\theta\cos\theta}{5K_\beta} \tag{2.83}$$

图 2.38 绘出了利用式(2.80)～式(2.83)计算驱动力和制动力与回正力矩关系的结果。与轮胎侧向力的情形不同，回正力矩在驱动和制动时有很大的不同，且随驱动力或制动力以及侧偏角的变化呈现相当复杂的变化规律。

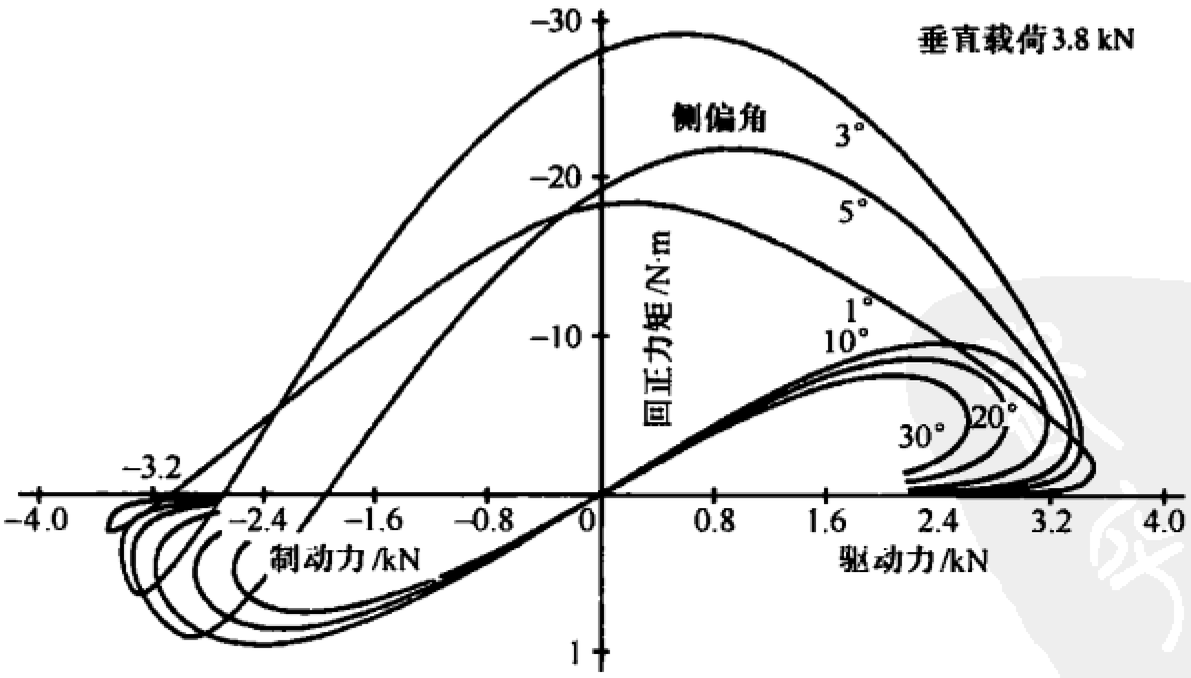
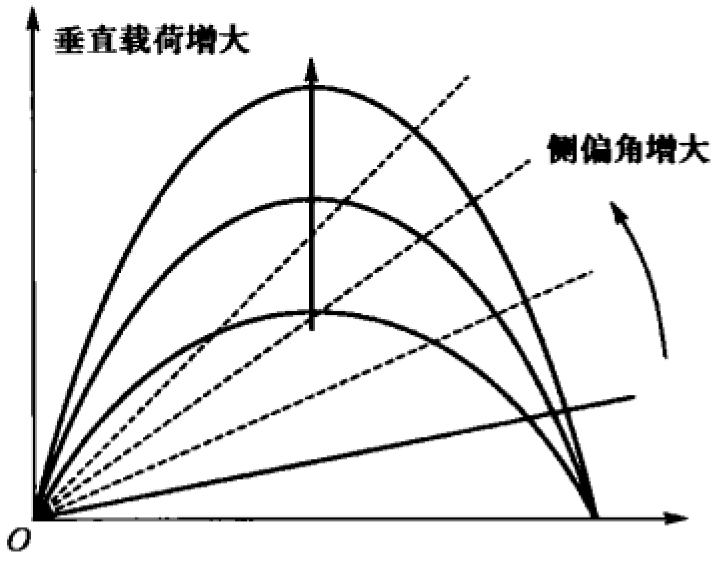


图 2.38 侧向力和纵向力对计算得到的回正力矩的影响

例题 2.2

试利用侧向力和垂直载荷分布示意图论证，对沿着纵向带有一小侧偏角的轮胎而言，由该小侧偏角引起的侧向力与侧偏角之间成比例关系。并证实，二者之间的比例关系与垂直载荷基本无关，而是取决于轮胎的侧偏刚度。

题解：例题 2.2 图为小侧偏角情况下轮胎侧向力和垂直载荷的分布示意图，其中的直线表示由轮胎胎面橡胶的侧向变形而产生的侧向力，而抛物线则表示垂直载荷与摩擦系数之积的分布情况。显然由图可见，由直线和一条抛物线围成的区域表示轮胎的侧向力。当侧偏角很小时，轮胎垂直载荷的变化对其几乎没有影响；而且该区域可近似看成一个三角形，因而其面积基本与侧偏角成比例关系。由于该三角形主要取决于由轮胎胎面橡胶的侧向变形，因此由侧向变形引起的力也直接取决于轮胎的侧偏刚度。



例题 2.2 图　小侧偏角下轮胎侧向力和垂直载荷的分布

例题 2.3

假如轮胎垂向接地压力在接地区上沿纵向为均匀分布，试推导出制动时轮胎的纵向力 F_x 和侧向力 F_y。

题解：由于垂向接地压力为均匀分布，则式(2.51)可变为

$$p=\frac{F_z}{bl} \tag{E2.6}$$

由于满足 $\sigma=\mu p$ 的 x' 点是粘着域和滑动域的分界点，将上式和式(2.50)代入 $\sigma=\mu p$，可得如下方程：

$$\sqrt{K_x^2 s^2+K_y^2\tan^2\beta}\frac{x_s'}{1-s}=\mu\frac{F_z}{bl} \tag{E2.7}$$

由于 $K_s=bl^2K_x/2$，$K_\beta=bl^2K_y/2$，上式可变形为：

$$2K_s\sqrt{s^2+\left(\frac{K_\beta}{K_s}\right)^2\tan^2\beta}\frac{x_s'}{l}\frac{1}{1-s}=2K_s\lambda\frac{x_s'}{l}\frac{1}{1-s}=\mu F_z \tag{E2.8}$$

故得：

$$\xi_s=\frac{x_s'}{l}=\frac{\mu F_z}{2K_s}\frac{1-s}{\lambda} \tag{E2.9}$$

按第 2.4.2 小节第五部分中的处理过程，可得 F_x 和 F_y 如下：

当 $\xi_s\geqslant 1$ 时，不存在滑动区，故有

$$F_x=b\int_0^l\sigma_x\mathrm{d}x'=\frac{-K_s s}{1-s} \tag{E2.10}$$

$$F_y=b\int_0^l\sigma_y\mathrm{d}x'=\frac{-K_\beta\tan\beta}{1-s} \tag{E2.11}$$

当 $\xi_s\leqslant 1$ 时，同时存在附着区和滑动区，故有

$$\begin{aligned}F_x&=b\left(\int_0^{x_s'}\sigma_x\mathrm{d}x'+\int_{x_s'}^l-\mu p\cos\theta\mathrm{d}x'\right)\\&=-\frac{K_s s}{1-s}\xi_s^2-\mu F_z\cos\theta(1-\xi_s)\end{aligned} \tag{E2.12}$$

$$\begin{aligned}F_y&=b\left(\int_0^{x_s'}\sigma_y\mathrm{d}x'+\int_{x_s'}^l-\mu p\sin\theta\mathrm{d}x'\right)\\&=-\frac{K_\beta\tan\beta}{1-s}\xi_s^2-\mu F_z\sin\theta(1-\xi_s)\end{aligned} \tag{E2.13}$$

2.5 轮胎的动态侧偏特性

到此为止，已经讨论的轮胎特性都是关于在一定的侧偏角下轮胎的侧向力和回正力矩的静态特性。而本节中，我们将考察侧偏角变化时的瞬时侧向力和回正力矩，即动态的轮胎侧偏特性。

在第 2.3 节和第 2.4 节中，我们从理论上考察了轮胎的侧偏特

性，所用的数学模型考虑了轮胎接地区部分的微小变形。但如果动态的侧偏特性也采用这些模型分析的话，就变得太复杂了。取而代之的是，我们将下面的研究仅限于小侧偏角范围，利用处理侧向变形的宏观轮胎模型考察其侧向力和回正力矩的瞬时响应。

2.5.1 侧向力的动态特性

如图 2.39 所示，当沿着轮胎回转方向行驶而突然产生一个侧偏角 β 时，在轮胎上会产生一个侧向力，并且接地面只在侧向产生大小为 y 的变形。此时，接地区的侧向速度为 $\dot{y}$，并由图 2.39 可知，接地区的侧偏角为 $\beta-\dot{y}/V$。

设 F 为轮胎的侧向力，K 为侧偏刚度，则有

$$F=K\left(\beta-\frac{\dot{y}}{V}\right) \quad (2.84)$$

如果定义轮胎侧向刚度为 k_y，则得：

$$F=k_y y \quad (2.85)$$

由上两式消去 y，可得：

$$\frac{K}{k_y V}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F=K\beta \quad (2.86)$$

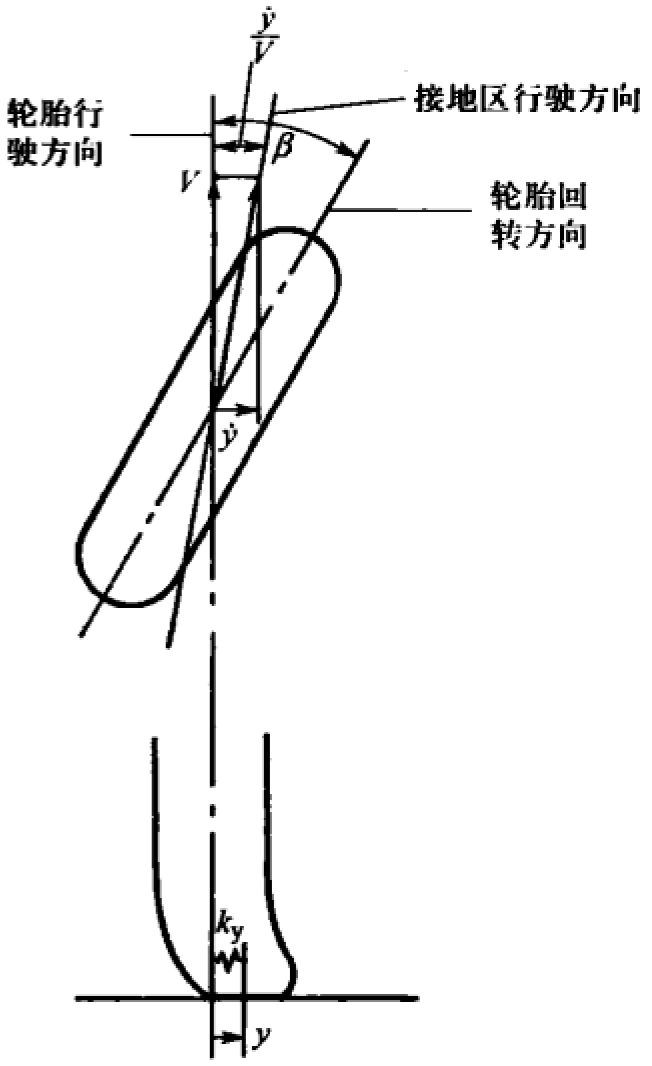


图 2.39 轮胎变形的瞬态特性模型

对上式进行拉普拉斯变换，并用侧向力相对于侧偏角的传递函数来表示，则有

$$\frac{F}{\beta}(s)=\frac{K}{1+\dfrac{K}{k_y V}s}=\frac{K}{1+T_1 s} \quad (2.87)$$

侧向力相对于侧偏角的响应可用以 $T_1=K/k_y V$ 为时间常数的 1 阶延迟环节来近似。

用 $j\omega$ 替代式(2.87)中的 s，可得侧向力的频率响应如下：

$$\frac{F}{\beta}\left(j\frac{\omega}{V}\right)=\frac{K}{1+j\frac{\omega}{V}\frac{K}{k_y}} \tag{2.88}$$

由式(2.88)，侧向力相对于侧偏角的频率响应可看成是相对于距离频率，而非时间频率 ω(rad/s)。图 2.40 即为这样的频率响应的测量实例。可见，响应可用一阶延迟环节来准确地近似表示。

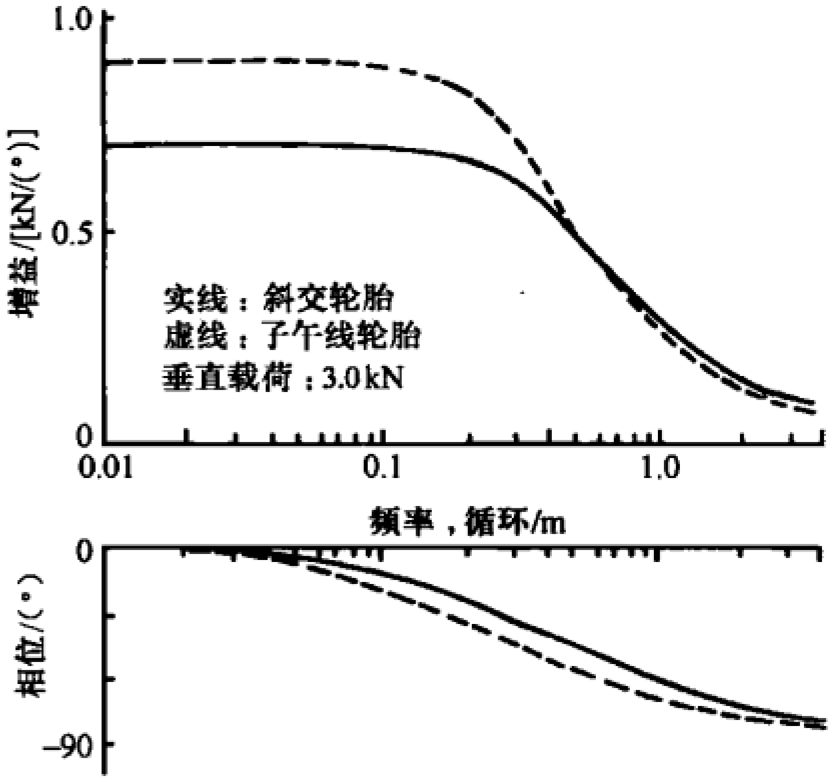


图 2.40 侧向力对侧偏角的频率响应

2.5.2 回正力矩的动态特性

静态的轮胎回正力矩由侧向力与轮胎拖距 ξ 之积给出。如第 2.5.1 小节所述，侧向力相对于侧偏角的瞬时响应可用一个一阶延迟环节来描述。因此，由此侧向力产生的回正力矩 M_s 的响应也可用一阶延迟环节来近似。设此时的时间常数为

$$\frac{M_s}{\beta}(s)=\frac{\xi K}{1+T_2 s} \tag{2.89}$$

在此情况下，当轮胎突然产生一个侧偏角时，轮胎自身将产生扭曲变形。由这种扭曲变形引起的力矩将构成瞬时轮胎回正力矩的一部分。轮胎的扭转角在侧偏角 β 产生的瞬间达到最大值，其大小与侧偏角一致。然而随后，扭转角会随着轮胎的转动而减小，在稳定状态变为

零。因此，由轮胎的扭转而产生的力矩 M_t 相对于侧偏角的响应可以如下的一阶延迟环节来近似表示：

$$\frac{M_t}{\beta}(s)=\frac{k_t T_3 s}{1+T_3 s} \tag{2.90}$$

式中，k_t 为轮胎的扭转刚度。

由上可知，轮胎的回正力矩 M 作为 M_s 与 M_t 之和，可由下式表示：

$$\begin{aligned}\frac{M}{\beta}(s)&=\frac{M_s}{\beta}(s)+\frac{M_t}{\beta}(s)=\frac{\xi K}{1+T_2 s}+\frac{k_t T_3 s}{1+T_3 s}\\&=\xi K\frac{1+\left(1+\frac{k_t}{\xi K}\right)T_3 s+\frac{k_t}{\xi K}T_2 T_3 s^2}{1+(T_2+T_3)s+T_2 T_3 s^2}\end{aligned} \tag{2.91}$$

其频率响应为

$$\frac{M}{\beta}\left(j\frac{\omega}{V}\right)=\xi K\frac{1-\frac{k_t V^2}{\xi K}T_2 T_3\left(\frac{\omega}{V}\right)^2+j\left(1+\frac{k_t}{\xi K}\right)VT_3\frac{\omega}{V}}{1-V^2 T_2 T_3\left(\frac{\omega}{V}\right)^2+jV(T_2+T_3)\frac{\omega}{V}} \tag{2.92}$$

图2.41给出了回正力矩相对于 ω/V 的频率响应的测量数据。图中曲线的形状证实了式(2.92)的近似结果是合理的。

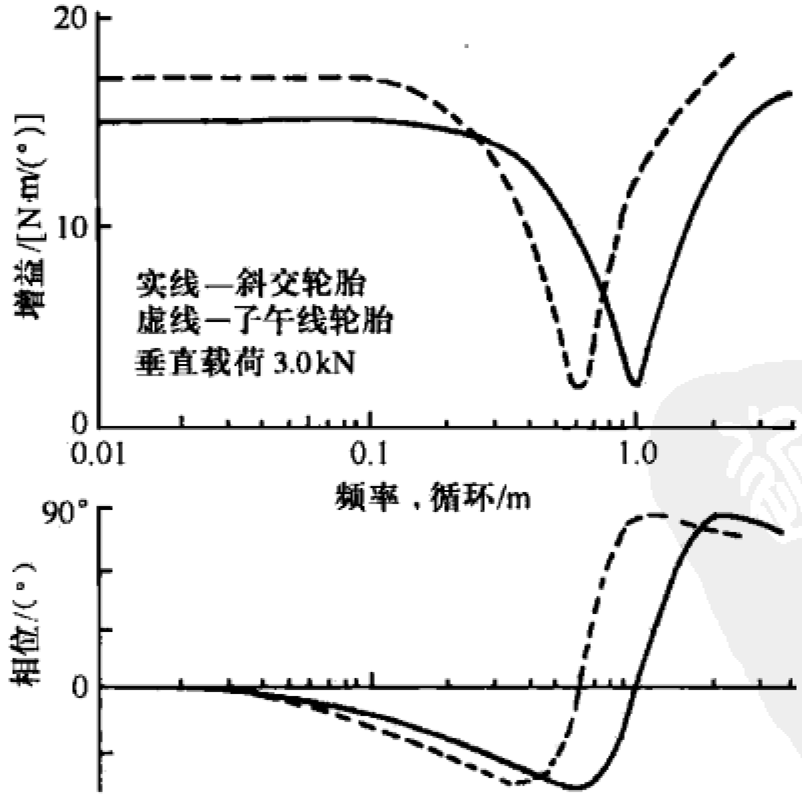


图2.41 回正力矩对侧偏角的频率响应

习题

2.1 设轮胎侧向力在其侧偏角为10°时达到饱和，轮胎垂直载荷为4.0kN，干路面上$\mu=1.0$，试根据式(2.24)求解轮胎侧偏刚度的近似值。

2.2 设轮胎侧向力在侧偏角为10°时饱和，试根据式(2.24)和式(2.26)估算回正力矩达到最大值时所对应的轮胎侧偏角。

2.3 求证：在小侧偏角情况下，轮胎拖距近似等于接地长度的1/6。提示：如例2.2中所述，沿轮胎接地面纵向的轮胎侧向变形几乎呈三角形分布。

2.4 车辆转向时，其离心力与四个轮胎的侧向力之和相平衡。现设四个轮胎具有相同的侧偏角，且侧偏刚度均为1.0kN/(°)；车辆质量、速度和转向半径分别为1500kg、60km/h和140m；假定侧向力与侧偏角成正比且侧偏角小于1°。试计算轮胎的侧偏角。

2.5 设在某干路面上，$\mu=1.0$，轮胎垂直载荷为5.0kN，受到的制动力为3.0kN，试计算可产生的最大轮胎侧向力。

2.6 设在某干路面上，$\mu=1.0$，若车辆的牵引力T为垂直载荷的50%，试利用式(2.40)计算侧向力减小了多少。

2.7 如例题2.2图中所示，侧向力由直线和抛物线围成的区域表示。其中，直线为线性侧向力分布线，而抛物线为垂直载荷分布与接地面的摩擦系数之积，且线性的变化率与侧偏角同步增大。试利用该示意图验证侧向力在侧偏角大范围增大时的非线性饱和特性。

2.8 试利用上题中的图解法验证：在某固定侧偏角情况下，轮胎侧向力相对于其垂直载荷呈非线性增大的关系。

2.9 利用式(2.87)，试计算轮胎侧向力相对于其侧偏角瞬时响应的时间常数的近似值，其中轮胎侧偏刚度、轮胎侧向刚度和车辆行驶速度分别为1.0kN/(°)、200kN/m和10m/s。

参考文献

[1] E. Fiala, Seitenkrafte am rollenden Luftreifen, VDI, Bd. 96, Nr. 29, 11, Okt., 1954.

[2] J. R. Ellis, Vehicle dynamics, London Business Book Ltd., London, 1969(Chapter 1).

[3] J. E. Bernard et al., Tire shear force generation during combined steering and braking maneuvers, SAE Paper 770852.

PDG

第 3 章　车辆动力学基础

3.1　引言

本章将首先了解车辆动力学的基础知识。如第 1 章所述，车辆动力学是研究由操纵车辆(即转向动作)而产生的车辆运动，只有通过操纵车辆，它才可以独立运动。

首先，需要研究对应于某一给定的转向输入下车辆的运动力学特性，并解释车辆的运动。我们在本章中只研究在预先给定输入下车辆的响应，而对由于车辆运动引起的转向特性将在后续章节中讨论。

至今为止，对于由预先给定的转向输入所产生的车辆运动响应已经有了大量的研究。这些研究为以后的车辆动力学研究建立了基础，是理解由转向输入引起的车辆独立运动(也就是本书中涉及的车辆动力学问题)所必需的[1],[2]。本章我们将阐述这些基础知识。

3.2　车辆运动方程

第 1 章中，我们已清楚了哪些是需要考虑的车辆运动自由度，也就是车辆的侧向、横摆和侧倾运动。然而，为了理解车辆运动的基本特性，我们需要进行更多的简化，只要不将问题的本质丢失即可。我们可以忽略车辆的瞬态现象，比如突然加速或减速的情况，也不考虑大幅度急转转向盘的情况。在这样的前提下，可以假定车辆以恒定的速度行驶，侧倾运动也可以忽略。如果车辆的前进速度为恒定，且没有侧倾，车辆的垂向高度也就可以被忽略，那么需考虑的只是车辆的侧向运动和横摆运动，这样车辆即可表示为一个投影于地面的刚体。

为了描述一个刚体的运动，必须先定义一个参考坐标系。根据特

定刚体的运动特性的不同，或许有多种方式来定义用于描述该刚体运动的坐标系。通过巧妙地定义一个坐标系，可以简化对该刚体运动的描述。所以对一个特定的刚体而言，选择合适的坐标系是重要的。考虑到这一点，明智的做法是首先推导基本的车辆运动方程。

3.2.1　固定于车辆坐标系下的运动方程

考虑在平面内运动的车辆。相对于固定于地面坐标系而言，车辆的纵向和侧向是持续变化的。而如果在车上来观察车辆，则不管车辆朝什么方向运动，其运动约束基本上是不变的。因此，用固定于车辆的坐标系来描述车辆运动比用固定于地面坐标系来描述更为方便。

如图 3.1 所示，X-Y 为固定于地面的平面坐标系。x-y 为固定于车辆的坐标系，其中 x 表示车辆的纵向，y 表示车辆的侧向，其坐标系原点位于车辆的质心 P 点，绕垂向轴的横摆角度取逆时针为正。

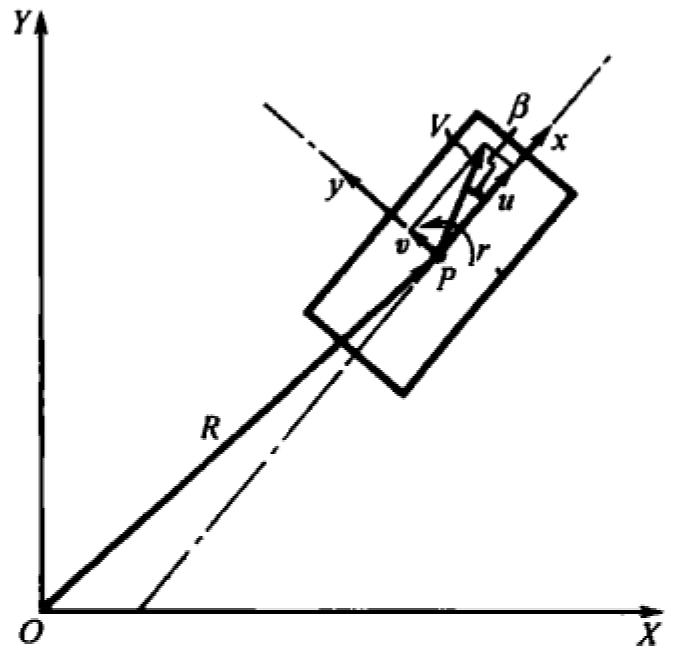


图 3.1　描述车辆平面运动的坐标轴

设车辆以某一速度在平面内行驶。相对于 X-Y 坐标系，P 点的位置矢量记为 $\boldsymbol{R}$，则其速度矢量 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 可表示为：

$$\dot{\boldsymbol{R}} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} \tag{3.1}$$

这里，以 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别表示 x 方向和 y 方向的单位矢量，以 u 和 v 分别为 P 点在 x 和 y 方向的速度分量。通过对式(3.1)求关于时间的导数，P 点的加速度可写成如下形式(其中“·”和“··”分别表示 d/dt，

d^2/dt^2)：

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \dot{u}\boldsymbol{i} + u\dot{\boldsymbol{i}} + \dot{v}\boldsymbol{j} + v\dot{\boldsymbol{j}} \tag{3.2}$$

x-y 坐标系固定于车辆，车辆绕 P 点的垂向轴有一个横摆角速度 r，有时也它称为横摆速度或横摆速率。

由图 3.2 所示，i 和 j 在 Δt 时间内的变化量为

$$\Delta\boldsymbol{i} = r\Delta t\boldsymbol{j}$$

$$\Delta\boldsymbol{j} = -r\Delta t\boldsymbol{i}$$

于是，有：

$$\dot{\boldsymbol{i}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{i}}{\Delta t} = r\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\boldsymbol{j}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{j}}{\Delta t} = -r\boldsymbol{i}$$

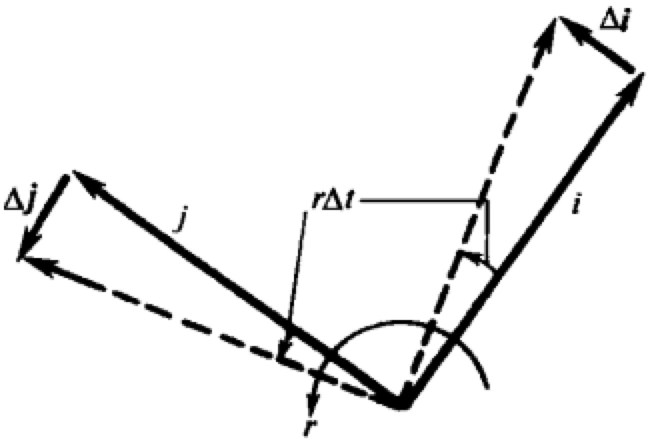


图 3.2　单位矢量的时间导数

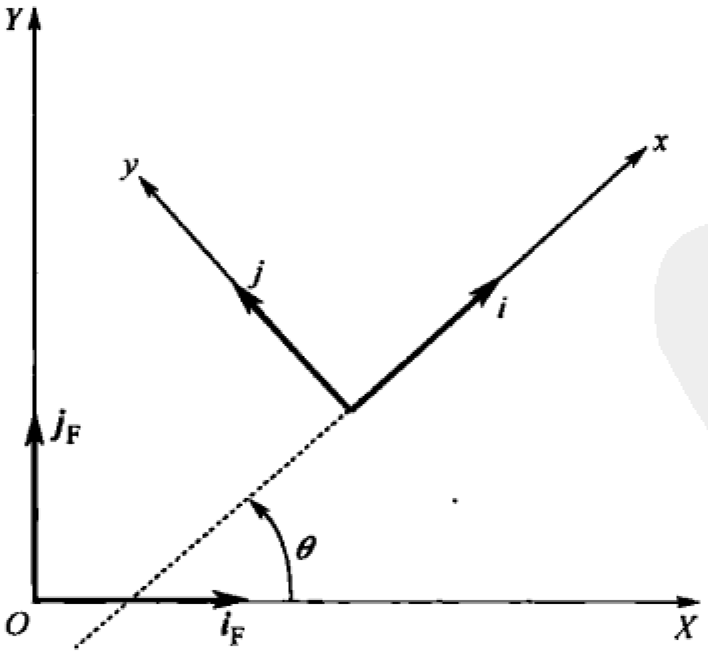
例题 3.1

给出另一种单位矢量 i 和 j 关于时间导数的表达方法。

题解：

如例题 3.1 图所示，设 $\boldsymbol{i}_F$ 和 $\boldsymbol{j}_F$ 为固定于地面坐标系的单位矢量，则 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{i} = \cos\theta\boldsymbol{i}_F + \sin\theta\boldsymbol{j}_F$$



例题 3.1 图

$$\boldsymbol{j} = -\sin\theta\boldsymbol{i}_F + \cos\theta\boldsymbol{j}_F$$

式中，θ 为矢量 $\boldsymbol{i}$ 和矢量 $\boldsymbol{i}_F$ 之间的夹角。

通过对上式求导，得：

$$\dot{\boldsymbol{i}} = -\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{i}_F + \dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{j}_F = r(-\sin\theta\boldsymbol{i}_F + \cos\theta\boldsymbol{j}_F) = r\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\boldsymbol{j}} = -\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i}_F - \dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{j}_F = -r(\cos\theta\boldsymbol{i}_F + \sin\theta\boldsymbol{j}_F) = -r\boldsymbol{i}$$

由此，可最终得出 P 点的加速度矢量 $\ddot{\boldsymbol{R}}$，即

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = (\dot{u} - vr)\boldsymbol{i} + (\dot{v} + ur)\boldsymbol{j} \tag{3.3}$$

车辆的行驶方向与其纵向的夹角 β 可表示为 $\tan^{-1}(v/u)$，我们称它为车辆的质心侧偏角。对普通的轿车而言，由于 $u \gg v$，所以可认为 $|\beta|$ 很小。而且，若车辆的行驶速度是恒定的，则意味着 $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ 也是一个常数。

通常，用质心侧偏角 β 比用 P 点的 u 和 v 来描述车辆运动要更加方便。换句话说，如果 β 小，则有

$$u = V\cos\beta \approx V,\quad v = V\sin\beta \approx V\beta,$$

$$\dot{u} = -V\sin\beta\,\dot{\beta} \approx -V\beta\dot{\beta},\quad \dot{v} = V\cos\beta\,\dot{\beta} \approx V\dot{\beta}$$

那么，式(3.3)和式(3.1)可写成如下形式：

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -V(\dot{\beta} + r)\beta\boldsymbol{i} + V(\dot{\beta} + r)\boldsymbol{j} \tag{3.3'}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = V\boldsymbol{i} + V\beta\boldsymbol{j} \tag{3.1'}$$

由式(3.3′)和式(3.1′)可知，矢量 $\ddot{R}$ 和矢量 $\dot{R}$ 的点积等于零，也就是说，$\ddot{R}$ 正交于 $\dot{R}$(即 P 点的行驶方向)。式(3.3′)表示，如果 β 很小，则可认为 P 点有一个垂直于车辆行驶方向、大小为 $V(\dot{\beta} + r)$ 的加速度，如图 3.3 所示。于是，当 β 很小时，可以认为与车辆行驶方向垂直的方向几乎就是车辆的侧向 y。因此，一辆在平面内以恒定速度运动的车辆，会有一个大小为 $V(\dot{\beta} + r)$ 的侧向(即沿着 y 方向)加速度。

车辆的侧向运动和横摆运动会在轮胎处产生侧偏角。如第 3 章所述，相应于轮胎侧偏角，轮胎将产生一个侧偏力。这样，由车辆运动而产生的侧偏力反过来又成为控制车辆运动的力。

如图 3.4a 所示，定义车辆左、右前轮相对于 x 方向的夹角为实际的转向角(记为 δ)，前、后轴两边车轮的轮胎侧偏角分别记为 β_{f1}、

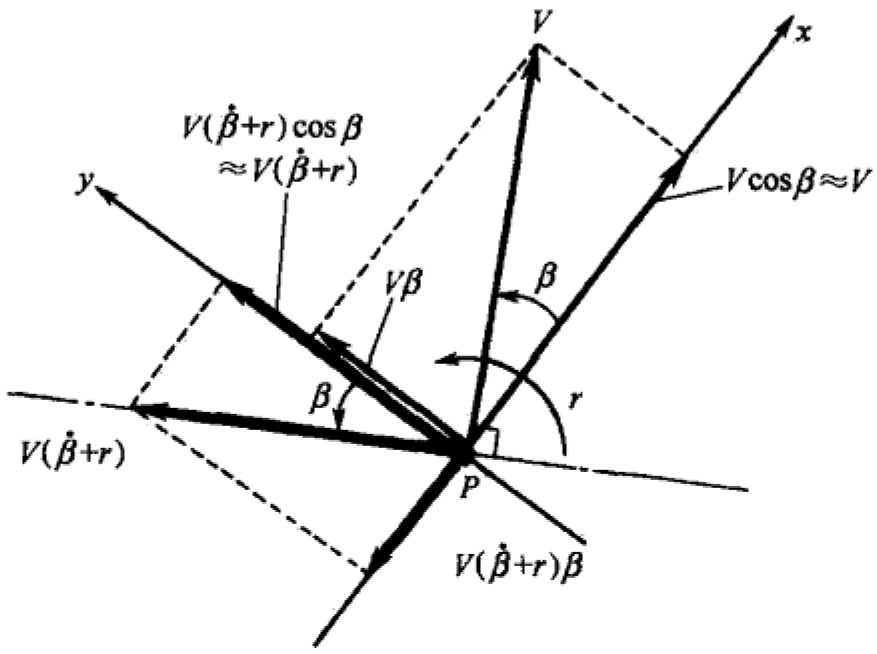


图 3.3　P 点处的加速度和速度

β_{f2}、β_{r1}、β_{r2}，作用于轮胎的侧偏力相应为 Y_{f1}、Y_{f2}、Y_{r1}、Y_{r2}。由于 $|\beta_{f1}|$、$|\beta_{f2}|$、$|\beta_{r1}|$、$|\beta_{r2}|$和$|\delta| << 1$，因而可以认为这些力的作用方向与轮胎航向垂直，即与车辆的侧向一致。因此，车辆的侧向运动可描述如下：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=Y_{f1}+Y_{f2}+Y_{r1}+Y_{r2} \tag{3.4}$$

式中，m 为车辆的惯性质量。

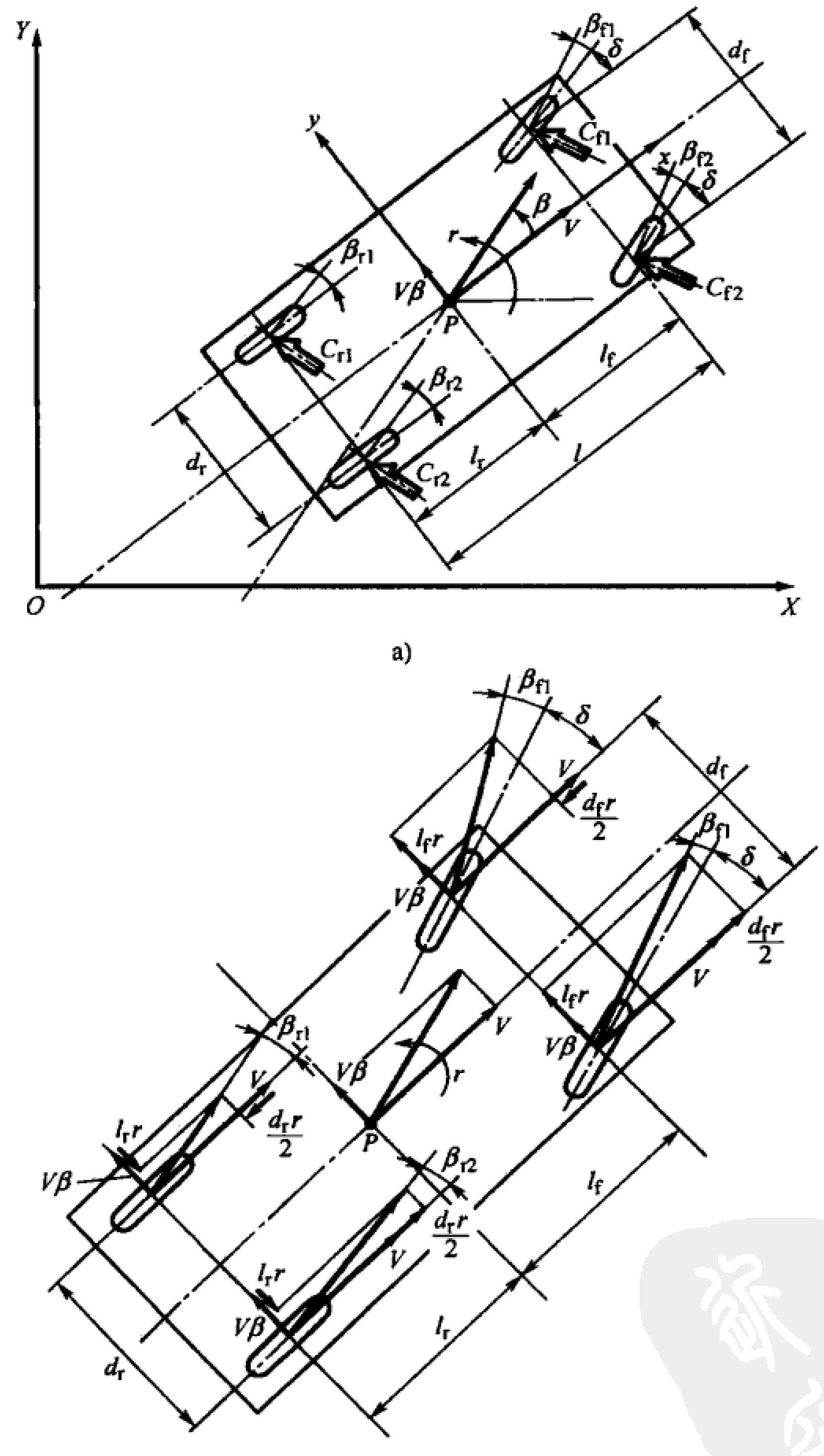
由于侧偏力还将产生绕质心的横摆力矩，车辆的横摆运动可表示如下：

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=l_f(Y_{f1}+Y_{f2})-l_r(Y_{r1}+Y_{r2}) \tag{3.5}$$

式中，I 为车辆的横摆转动惯量；l_f 和 l_r 分别为车辆质心至前、后车轴的距离，这里假定轮胎侧偏力作用方向沿着相应的车轴。

式(3.4)和式(3.5)就是描述车身无侧倾运动时车辆以恒速作平面运动的基本方程。

为了更详细地研究作用于轮胎的侧偏力 Y_{f1}、Y_{f2}、Y_{r1}和 Y_{r2}，首先应该考察一下各轮胎的侧偏角 β_{f1}、β_{f2}、β_{r1}和 β_{r2}。轮胎的侧偏角定义为轮胎行进方向与轮胎航向(或车轮旋转平面)的夹角。若将车辆视作刚体，它沿纵向(即 x 方向)有一个速度分量 V；沿侧向(即 y 方向)有一个速度分量 $V\dot{\beta}$，同时还有一个绕质心转动的角速度 r。因此，



b)

图 3.4　车辆平面运动和每个轮胎的侧偏力

a）车辆平面运动　b）每个轮胎的侧偏力

车辆的每一个轮胎都会有关于质心的速度分量和绕质心转动的速度分量。对每个轮胎而言，它在 x 方向和 y 方向的速度分量如图 3.4b 所示。车辆的前轮航向相对于车辆的纵向(即 x 方向)有一个角位移 δ，也就是真正的前轮转向角，而后轮的航向与车辆的纵向相同。因此，各轮胎的侧偏角可分别表示如下：

$$\beta_{f1} \approx \frac{V\beta + l_f r}{V - d_f r/2} - \delta \approx \beta + \frac{l_f r}{V} - \delta$$

$$\beta_{f2} \approx \frac{V\beta + l_f r}{V + d_f r/2} - \delta \approx \beta + \frac{l_f r}{V} - \delta$$

$$\beta_{r1} \approx \frac{V\beta - l_r r}{V - d_r r/2} \approx \beta - \frac{l_r r}{V}$$

$$\beta_{r2} \approx \frac{V\beta - l_r r}{V + d_r r/2} \approx \beta - \frac{l_r r}{V}$$

式中，d_f 和 d_r 分别为车辆的前、后轮距。

由于 $|\beta|$、$|l_f r/V|$、$|l_r r/V|$、$|d_f r/2V|$和$|d_r r/2V| \ll 1$，因而可忽略其二次项。然后，对前、后轮均假定左右轮胎侧偏角相等，并分别记为 β_f 和 β_r，则有

$$\beta_f = \beta_{f1} = \beta_{f2} = \beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \tag{3.6}$$

$$\beta_r = \beta_{r1} = \beta_{r2} = \beta - \frac{l_r r}{V} \tag{3.7}$$

由于假定左、右轮胎侧偏角相等且前轮的转向角很小，并忽略侧倾运动，因而可认为前、后轴的左右轮胎分别被等价集中于车辆的前、后轴与 x 轴的交点处，如图 3.5 所示。这样，一个四轮车辆就被简化成了一个两轮车辆，使得车辆运动分析变得更为简单。

通常，若左、右轮胎的特性没有差异的话，则认为左、右轮胎的侧偏力相等。这里，设前轮和后轮的侧偏力分别为 Y_f 和 Y_{r1}，则有

$$2Y_f = Y_{f1} + Y_{f2}$$

$$2Y_r = Y_{r1} + Y_{r2}$$

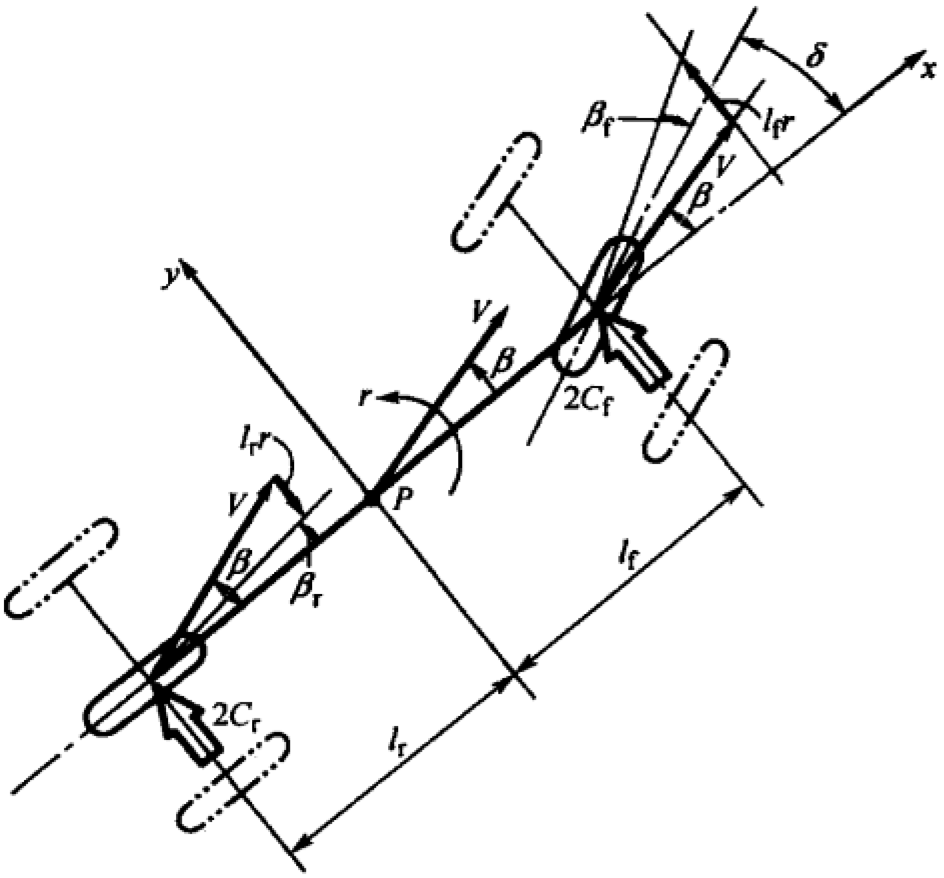


图 3.5　等效的自行车模型

由于这些力均作用于 y 方向，所以式(3.4)和式(3.5)可变为

$$mV\left(\frac{d\beta}{dt}+r\right)=2Y_f+2Y_r \tag{3.4'}$$

$$I\frac{dr}{dt}=2l_fY_f-2l_rY_r \tag{3.5'}$$

设前、后轮胎的侧偏刚度分别为 K_f 和 K_r，并设 Y_f 和 Y_r 分别与其侧偏角 β_f 和 β_r 成正比。在图 3.4a 所示的 x-y 坐标系中，所有的角均取逆时针为正。则当侧偏角为正时，Y_f 和 Y_r 沿 y 的负方向作用，并分别表示为

$$Y_f=-K_f\beta_f=-K_f\left(\beta+\frac{l_fr}{V}-\delta\right) \tag{3.8}$$

$$Y_r=-K_r\beta_r=-K_r\left(\beta-\frac{l_rr}{V}\right) \tag{3.9}$$

由上式可清楚地看出，作用于车辆的力 Y_f 和 Y_r 不取决于车辆相对于地面固定坐标系的位置和姿态角，而是取决于自身的运动，也就是其 β 和 r 以及前轮转向角 δ。将式(3.8)和式(3.9)分别代入前面的式

(3.4′)和式(3.5′)，可得：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=-2K_f\left(\beta+\frac{l_f}{V}r-\delta\right)-2K_r\left(\beta-\frac{l_r}{V}r\right) \tag{3.10}$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-2K_f\left(\beta+\frac{l_f}{V}r-\delta\right)l_f+2K_r\left(\beta-\frac{l_r}{V}r\right)l_r \tag{3.11}$$

再重新整理上述等式，得：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\delta \tag{3.12}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \tag{3.13}$$

以上等式就成为了描述车辆平面运动的基本运动方程。式(3.12)和式(3.13)的左边描述了相应于方程右边任意给定的前轮转角 δ 车辆的运动特性。由以上等式还可清楚地看出，车辆的运动并不受其相对于地面固定坐标系的位置或其航向的影响。

这里，将式(3.12)和式(3.13)进行拉普拉斯变换，其中 s 为拉普拉斯算子，$\beta(s)$、$r(s)$ 和 $\delta(s)$ 分别表示 β、r 和 δ 的拉普拉斯变换，则变换后的式(3.12)和式(3.13)可写为如下形式：

$$\begin{bmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\frac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta(s)\\ r(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2K_f\delta(s)\\ 2l_fK_f\delta(s)\end{bmatrix}$$

由此，得到车辆运动的特征方程式为

$$\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V} \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}=0$$

展开并整理，有

$$mIV\left[s^2+\frac{2m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2I(K_f+K_r)}{mIV}s+\frac{4K_fK_rl^2}{mIV^2}-\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{I}\right]=0 \tag{3.14}$$

式中，l 为轮距，即 $l=l_f+l_r$。

通过观察导出的运动方程式(3.12)和式(3.13)，就可看出它们

是关于β和r的一阶联立微分方程。事实上，这种形式的方程并非车辆运动所独有。当转向时，对独立运动的船舶而言，其运动也被表达为同样的形式。就车辆而言，前后轮胎的侧偏力因车辆运动而产生，又反过来控制车辆的运动。而对船舶来说，其侧向浮力由船舶的纵向与其行驶方向的夹角产生，并且该力控制着船舶的运动。这就是为什么车辆与船舶会有同样形式的运动方程。飞机是依靠升力运动的代表性例子，尤其是在其纵向运动中，同样可见到如前所述类似的动力学方程。因此，式(3.12)和式(3.13)所表示的形式可作为运动方程的一般形式，通用于对车辆、船舶和飞机运动的描述。

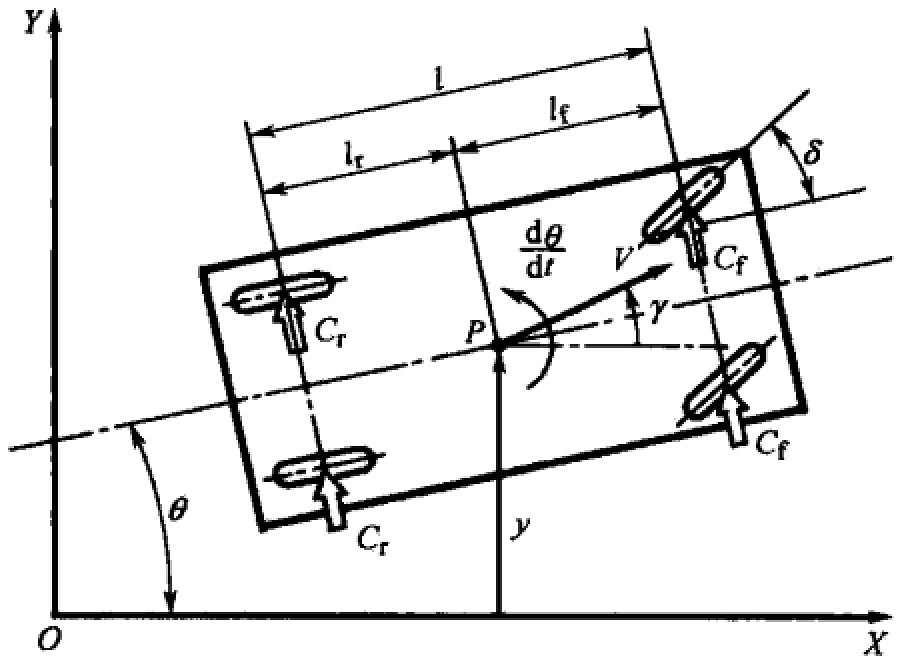
更仔细地观察式(3.12)和式(3.13)可以发现，系数$l_fK_f-l_rK_r$对车辆运动有很大的影响。若此值为零，即$l_fK_f=l_rK_r$，则车辆的侧向运动和横摆运动完全不耦合，此时r与β根本不再相关。当$l_fK_f-l_rK_r\neq 0$，它的符号(即正或负)将显著影响着侧向运动和横摆运动的耦合形式，即l_fK_f和l_rK_r的大小直接影响着车辆运动的基本特征，关于这点我们以后将详细阐述。

3.2.2　地面固定坐标系下的运动方程

前面我们已经对在固定于车辆坐标系下的车辆运动进行了描述，理由是它更有利于理解以后讲到的现象。然而在某些场合下，用地面固定坐标系描述车辆运动会更方便。比如，考察以恒定速度在直路面行驶时车辆的运动时，以直路面描述车辆的运动更容易、更方便。

如图3.6所示，取直路面的方向为X轴，与之垂直的方向为Y轴，定义此坐标系为固定于地面坐标系X-Y。设X轴与车辆纵向的夹角(即车辆的横摆角)为θ，X轴与车辆航向的夹角为γ，车辆质心P点偏离X轴的侧向位移为y。通常当考虑在直线路面行驶的车辆的运动时，可以假设$|\gamma|<<1$，且$|\theta|<<1$。在此假设下，若前轮转角$|\delta|<<1$，则可认为作用于前、后轮胎的侧偏力Y_f和Y_r的方向几乎与Y方向相同。因此，车辆的运动可如下描述。首先，车辆质心在Y方向的运动为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=2Y_f+2Y_r \tag{3.15}$$



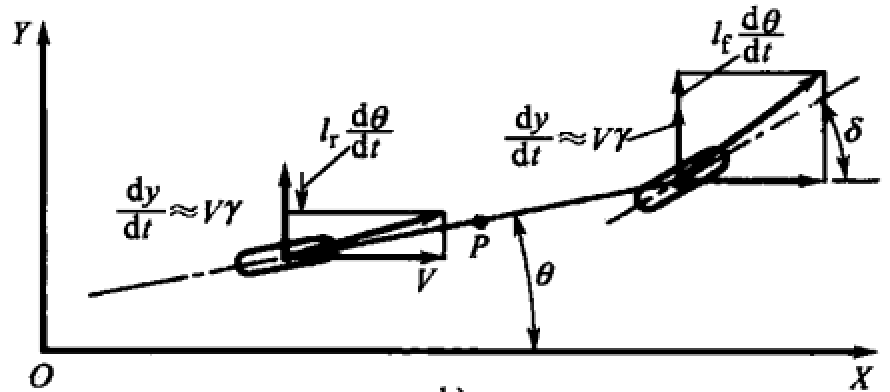


图 3.6　以地面固定坐标系表示的车辆运动

而车辆的横摆运动为

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=2l_fY_f-2l_rY_r \tag{3.16}$$

当$|\gamma|$很小时，可以认为车辆质心在 X 方向速度分量 $V\cos\delta\approx V$，并且在 Y 方向的速度分量 $V\sin\gamma\approx V\gamma=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$。同时，车辆还以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 的角速度绕质心转动。假设车辆前、后的左右车轮分别集中于其前、后车轴的中心，若$|\theta|$很小，则前、后轮沿 Y 方向附加的速度分量分别等于 $l_f(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$ 和 $l_r(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$。因此，根据图 3.6b，对前、后轮而言，其行进方向分别存在着一个相对于 X 轴的夹角，记为 γ_f 和 γ_r，分别为

$$\gamma_f=\frac{V\gamma+l_f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{V}=\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{l_f}{V}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\gamma_r=\frac{V\gamma-l_r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)}{V}=\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}-\frac{l_r}{V}\frac{d\theta}{dt}$$

前、后轮的航向与 X 轴的夹角分别为 $\theta_f=\theta+\delta$ 和 $\theta_r=\theta$。于是，前、后轮胎侧偏角（即 β_f 和 β_r）可分别表示为

$$\beta_f=\gamma_f-\theta_f=\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{l_f}{V}\frac{d\theta}{dt}-\theta-\delta \tag{3.17}$$

$$\beta_r=\gamma_r-\theta_r=\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}-\frac{l_r}{V}\frac{d\theta}{dt}-\theta \tag{3.18}$$

作用于前、后轮的侧偏力（即 Y_f 和 Y_r）可表示为

$$Y_f=-K_f\beta_f=K_f\left(\delta+\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}-\frac{l_f}{V}\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{3.19}$$

$$Y_r=-K_r\beta_r=K_r\left(\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{l_r}{V}\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{3.20}$$

将其代入式(3.15)和式(3.16)，得：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=2K_f\left(\delta+\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}-\frac{l_f}{V}\frac{d\theta}{dt}\right)+2K_r\left(\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{l_r}{V}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}=2K_f\left(\delta+\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}-\frac{l_f}{V}\frac{d\theta}{dt}\right)l_f-2K_r\left(\theta-\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{l_r}{V}\frac{d\theta}{dt}\right)l_r$$

重新整理上述两式，得：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2(K_f+K_r)}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}\frac{d\theta}{dt}-2(K_f+K_r)\theta=2K_f\delta \tag{3.21}$$

$$\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}\frac{dy}{dt}+I\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\frac{d\theta}{dt}-2(l_fK_f-l_rK)\theta=2l_fK_f\delta \tag{3.22}$$

以上就是在地面固定坐标系下车辆的运动方程。

这样，对在近似于直线的路面上、以恒定速度行驶的车辆而言，当其侧向速度和横摆角很小时，用地面固定坐标系能以更简单的形式描述车辆的侧向和横摆运动，对该现象的分析和理解也变得更加容

易。式(3.21)和式(3.22)的左边分别描述了车辆对于转向角 δ 的侧向位移 y 和横摆角 θ。其中一项，即 $l_f K_f - l_r K_r$，影响着 y 和 θ 的耦合状态，表明：无论是在固定于地面还是固定于车辆的坐标系中，这一项的重要性均有所体现。

接下来，将求式(3.21)和式(3.22)的特征方程。其拉普拉斯变换形式的方程如下：

$$\begin{bmatrix} ms^2 + \dfrac{2(K_f + K_r)}{V}s & \dfrac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{V}s - 2(K_f + K_r) \\ \dfrac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{V}s & Is^2 + \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}s - 2(l_f K_f - l_r K_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2K_f \delta(s) \\ 2l_f K_f \delta(s) \end{bmatrix}$$

式中，$y(s)$ 和 $\theta(s)$ 分别为对 y 和 θ 的拉普拉斯变换。

于是，得到其特征方程如下：

$$\begin{vmatrix} ms^2 + \dfrac{2(K_f + K_r)}{V}s & \dfrac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{V}s - 2(K_f + K_r) \\ \dfrac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{V}s & Is^2 + \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}s - 2(l_f K_f - l_r K_r) \end{vmatrix} = 0$$

展开上式，并重新整理，得：

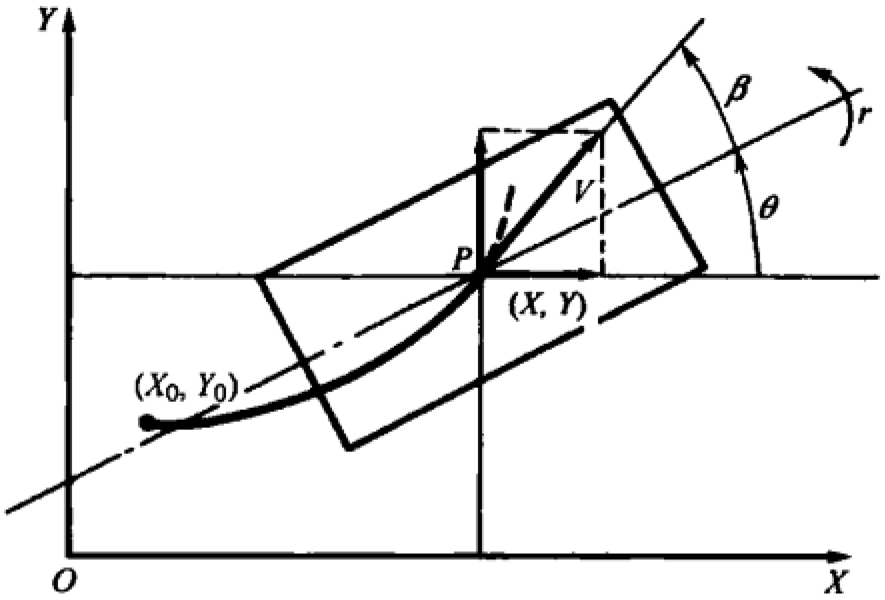
$$mIs^2 \left[s^2 + \frac{2m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + 2I(K_f + K_r)}{mIV}s + \frac{4K_f K_r l^2}{mIV^2} - \frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{I} \right] = 0 \tag{3.23}$$

在该特征方程中，若省略其左边的 s^2 项，则它与车辆固定坐标系中的特征式(3.14)吻合，保证了选取的坐标系无论是固定于车辆还是固定于路面，对车辆运动的描述本质上都是相同的。但式(3.23)和式(3.14)的左边不同，区别是前者带有 s^2 项。独立出现于特征方程中的 s^2 项，在数学意义上表明，无论在直路面的何处，车辆都能通过转向而自由地运动。在现实意义上则表明，车辆在道路上行驶时，可以变换车道和躲避障碍。另一方面，这个 s^2 项也表明若不对车辆施加恰当的转向操纵，由某些干扰引起的路径侧向偏离 $|y|$ 将不断增

大，甚至可能致使车辆驶离道路(参见第 7 章)。

例题 3.2

在地面固定坐标系下，试用式(3.12)和式(3.13)中的 β 和 r 表示运动车辆的质心轨迹。



例题 3.2 图　车辆的平面运动

题解：如例题 3.2 图所示，设车辆质心 P 点在地面固定坐标系中的位置为 (X,Y)，车辆相对于 X 轴的横摆角为 θ，则有如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=V\cos(\beta+\theta) \tag{E3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=V\sin(\beta+\theta) \tag{E3.2}$$

对上式积分，则得到描述车辆质心位置的方程如下：

$$X = X_0 + V\int_0^t \cos(\beta+\theta)\,\mathrm{d}t \tag{E3.3}$$

$$Y = Y_0 + V\int_0^t \sin(\beta+\theta)\,\mathrm{d}t \tag{E3.4}$$

其中

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t r\,\mathrm{d}t \tag{E3.5}$$

式中，X_0、Y_0 和 θ_0 分别表示 X、Y 和 θ 的初始值。

3.3 车辆的稳态转向

通常情况下，为了从理论上理解一个力学系统的特性，可以通过考虑在适当的初始条件下对其运动方程求解来实现。但有时不一定能求到其运动方程的解析解。或是即使能求到其解析解，其结果也可能极为复杂，因而难于理解其运动特性。虽然可以用计算机对那些难以求解的运动方程进行数值求解，但要理解其基本的运动特征几乎是不可能的。现有几种方法可用，可以不通过直接求解运动方程来理解其基本的运动特性。一个方法是通过分析这个力学系统的稳态条件来了解其静态特性。还有一个方法是通过考察该力学系统的特征方程的特征根以及对周期性外界干扰的响应，以研究其动力学特性。

正常情况下，以固定的转向角及恒定的速度行驶的车辆将作等曲率半径稳定的圆周运动，我们称之为稳态转向。通过研究稳态转向运动中车辆的特性，我们可以理解车辆运动的基本性质。

3.3.1 稳态转向运动的描述

1. 利用运动方程描述

根据第 3.2 节中固定于车辆坐标系下的运动方程，我们来描述车辆的稳态转向运动。车辆在作稳态转向运动时，其质心侧偏角和横摆角速度不变。因此，将稳态条件 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t=0$ 和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$ 分别代入式(3.12)和式(3.13)，有

$$2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\delta \tag{3.24}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \tag{3.25}$$

对 β 和 r 求解，得：

$$\beta=\begin{vmatrix}2K_f & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\\ 2l_fK_f & \dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\end{vmatrix}\frac{\delta}{\Delta} \tag{3.26}$$

$$r=\begin{vmatrix}2(K_f+K_r) & 2K_f\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & 2l_fK_f\end{vmatrix}\frac{\delta}{\Delta} \tag{3.27}$$

其中，

$$\Delta=\begin{vmatrix}2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & \dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\end{vmatrix} \tag{3.28}$$

将式(3.26)～式(3.28)展开并整理，得到的 β 和 r 分别如下：

$$\beta=\left(\frac{1-\dfrac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2}{1-\dfrac{m}{2l^2}\dfrac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2}\right)\frac{l_r}{l}\delta \tag{3.29}$$

$$r=\left(\frac{1}{1-\dfrac{m}{2l^2}\dfrac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2}\right)\frac{V}{l}\delta \tag{3.30}$$

若车辆以恒定速度 V、横摆角速度 r 作稳态转向运动，则其稳态转向半径 ρ 为

$$\rho=\frac{V}{r}=\left(1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2\right)\frac{l}{\delta} \tag{3.31}$$

车辆以转向角 δ、恒定车速 V 进行的稳态转向运动由式(3.29)～式(3.31)所描述，这些方程在物理意义上表明了不同行驶速度下相应于某一转向角，车辆的质心侧偏角 β、横摆角速度 r 和转向半径 ρ 是如何变化的。

假设车辆以几乎 $V=0$ 的低速作稳态转向运动，则式(3.29)～式(3.31)中的 V^2 可忽略不计，那么 β、r 和 ρ 可表示如下：

$$\begin{aligned}\beta_{(V\approx 0)}&=\beta_s=\frac{l_r}{l}\delta\\ r_{(V\approx 0)}&=r_s=\frac{V}{l}\delta\\ \rho_{(V\approx 0)}&=\rho_s=\frac{l}{\delta}\end{aligned} \tag{3.32}$$

那么，表示稳态转向运动的式(3.29)～式(3.31)可写为如下形式：

$$\frac{\beta}{\beta_s}=\frac{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f}{l_rK_r}V^2}{1-\dfrac{m}{2l^2}\dfrac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2} \tag{3.29'}$$

$$\frac{r}{r_s}=\frac{1}{1-\dfrac{m}{2l^2}\dfrac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2} \tag{3.30'}$$

$$\frac{\rho}{\rho_s}=1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2 \tag{3.31'}$$

上述方程是以车辆作 $V\approx 0$ 的低速稳态转向运动状态作为基准，表明了车辆稳态转向运动的条件是如何随车速而变化的。

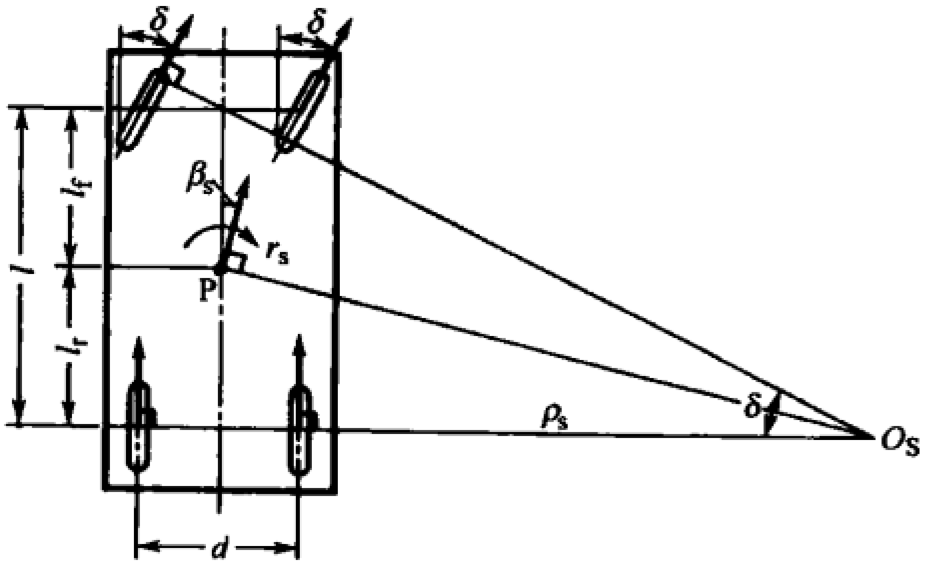
2. 几何学描述

前面，我们仅仅是通过将稳态转向运动的条件代人第 3.2 节导出的车辆运动方程，研究了车辆相应于转向角 δ 作稳态转向时，β、r 和 ρ 的响应。通过对式(3.29)～式(3.31)进一步推导，或通过观察式(3.29′)～式(3.31′)，我们可以看到其响应量是如何随车速而变化的。

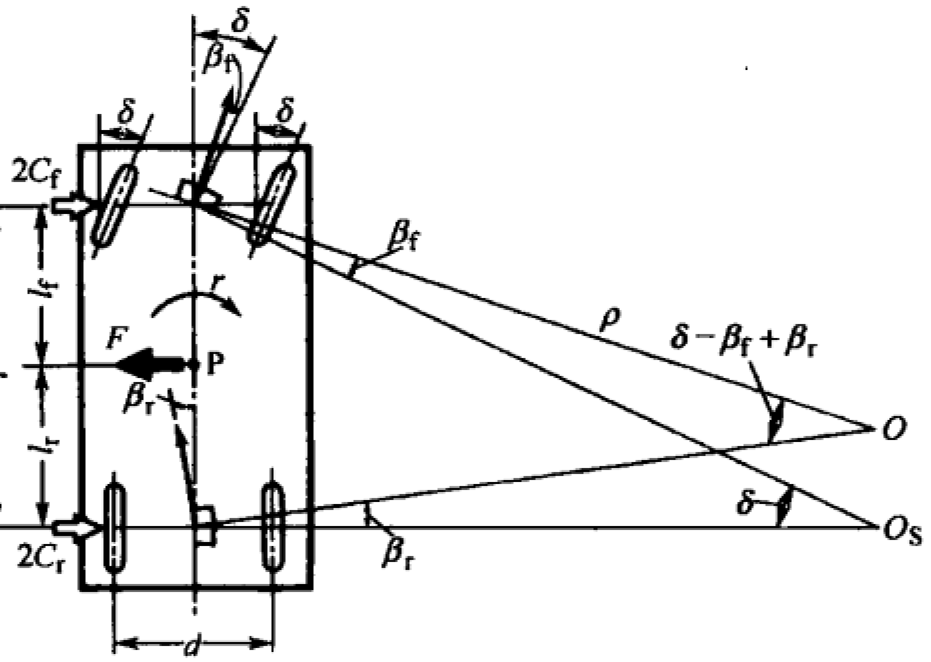
接下来，我们将从几何学角度来研究车辆的稳态转向运动，以便能更加直观地理解车辆的运动。在几何学分析中，横摆角和横摆角速度并非如运动方程中那样定义为逆时针为正，而是以图 3.7a 所示的方向为正。

首先，考虑车辆以 $V\approx 0$ 作低速稳态转向运动的情形。这种情况下，由于车辆不受离心力的作用，也不受侧向力作用，故前、后轮无侧偏力。当前、后轮都沿着车辆的航向前进时，车轮不产生侧偏角，而是绕 O_s 点作圆周运动，如图 3.7a 所示。由该图可得如下几何关系：

$$\begin{aligned}\rho_s&=\frac{1}{\delta}\\ r_s&=\frac{V}{\rho_s}=\frac{V}{l}\delta\\ \beta_s&=\frac{l_r}{\rho_s}=\frac{l_r}{l}\delta\end{aligned} \tag{3.33}$$



a)



b)

图 3.7　低速时的稳态转向运动和离心力作用下的稳态转向运动

a）低速时的稳态转向运动　b）离心力作用下的稳态转向运动

其中，$0<\delta\ll 1$，$l\ll\rho$。由图 3.7a 可见，严格地说，左、右前轮真正的转向角并非 δ，而是左边的转向角应比 δ 稍小，右边的比 δ 稍大。实际中的车辆是采用转向连杆机构来实现的。但若 $\delta\ll 1$ 且 $\rho_s\gg d$，则左、右前轮转向角的差别很小，那么可以认为二者具有相同的转向角 δ。式(3.33)与稳态转向式(3.32)吻合，而后者是在假定 $V\approx 0$ 时推导出来的。这种几何学关系被称为阿克曼转向几何学，并且 $\delta=l/\rho_s$ 被称为为阿克曼转向角。

当车辆以较大的速度作圆周运动时，受到的离心力将会显著增大。这时，就需要有前、后轮的侧偏力与之平衡，故前、后轮就会产

生侧偏角。当离心力作用在车辆的质心时，图 3.7a 所示圆周运动条件就不再准确，式(3.33)也不再准确。图 3.7b 给出了在离心力作用下，前、后轮产生侧偏角(β_f 和 β_r)时车辆作圆周运动的情形。

车辆作圆周运动的中心为分别垂直于前、后轮行进方向的两条直线的交点 O，推导出的几何关系如下：

$$\rho = \frac{1}{\delta - \beta_f + \beta_r} \tag{3.34}$$

其中假定 $0 < \delta \ll 1$、$0 < \beta_f$、$\beta_r \ll 1$，$\rho_s \gg l$ 和 d。

这里，令 $r = V/\rho$，则有

$$r = \frac{V(\delta - \beta_f + \beta_r)}{l} \tag{3.35}$$

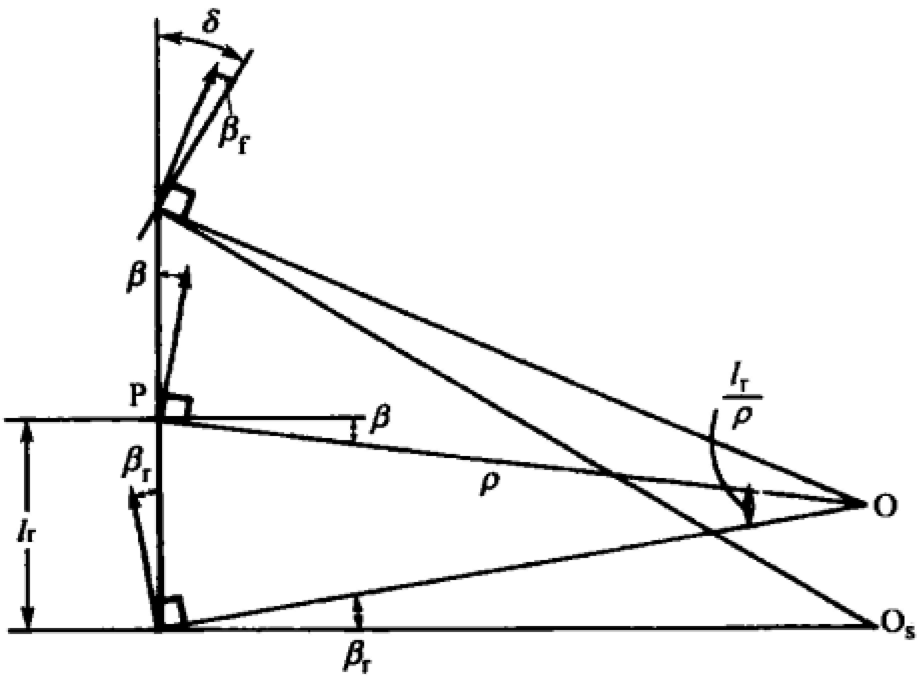


图 3.8　稳态转向中的侧偏角

再根据图 3.8，进一步有

$$\beta + \beta_r = \frac{l_r}{\rho}$$

故得：

$$\beta = \frac{l_r}{\rho} - \beta_r = \frac{l_r}{l}\delta - \frac{l_r\beta_f + l_f\beta_r}{l} \tag{3.36}$$

式(3.34)～式(3.36)表示的车辆稳态转向方程是由几何学关系导出的。前、后轮的侧偏角 β_f 和 β_r 可由作用于车辆质心的离心力求得，

而离心力取决于车辆速度 V。因此，式(3.34)~式(3.36)中的 ρ、r 和 β 也随速度 V 而变化。

我们已经通过推导式(3.29)~式(3.31)得到了不同车速下的稳态转向条件。从前面的讨论已知，稳态转向条件变化的原因是由于离心力随车速而改变，从而引起前、后车轮侧偏角改变，反过来又由此引起圆周运动几何学及稳态转向条件发生改变。

表示车辆稳态转向特性的式(3.34)~式(3.36)是由几何关系导出的。这些方程不受侧向力与侧偏角(β_f 和 β_r)关系的影响，也不受任何作用于前、后车轮的侧向力的影响。只要 $|\delta| \ll 1$，且 $\rho \gg l$ 和 d，这些方程在任何情况下均有效。而相对于此，值得注意的是，式(3.29)~式(3.31)和式(3.29′)~式(3.31′)只有当作用于前、后轮的侧向力正比于其侧偏角(β_f 和 β_r)时才有效。

由此可见，根据稳态转向几何学描述是可能推出式(3.29)~式(3.31)的。当作用于前、后轮胎的侧向力正比于其侧偏角时，即分别为 $-2K_f\beta_f$ 和 $-2K_r\beta_r$ 时，车辆受到的离心力为 mV^2/ρ。如果车辆处于稳态转向运动中，则可导出以下等效的方程：

$$\frac{mV^2}{\rho} - 2K_f\beta_f - 2K_r\beta_r = 0$$

$$-2l_fK_f\beta_f + 2l_rK_r\beta_r = 0$$

由以上两个方程，求出前、后轮胎的侧偏角为

$$\beta_f = \frac{mV^2 l_r}{2lK_f}\frac{1}{\rho}$$

$$\beta_r = \frac{mV^2 l_f}{2lK_r}\frac{1}{\rho}$$

将上面的 β_f 和 β_r 代入式(3.34)、式(3.35)和式(3.36)，则可分别得到式(3.31)、式(3.30)和式(3.29)。

3.3.2　稳态转向及转向特性

1. 不足转向(US)和过多转向(OS)特性

采用 3.3.1 小节推导的描述车辆稳态转向的方程，在本小节我们将更加详细地研究随着行驶速度的变化，车辆稳态转向关系是如何受

车辆特性影响的。

首先来看由式(3.31)给出的转向半径 ρ。设前轮转向角为 δ_0，则有

$$\rho=\left(1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2\right)\frac{1}{\delta_0} \tag{3.37}$$

上式表明，以固定转向角 δ_0 作稳态转向运动的车辆，其转向半径 ρ 如何随行驶速度 V 的变化而变化。图 3.9 表明了 $(l_fK_f-l_rK_r)$ 的符号对 ρ 与 V 之间关系的影响。

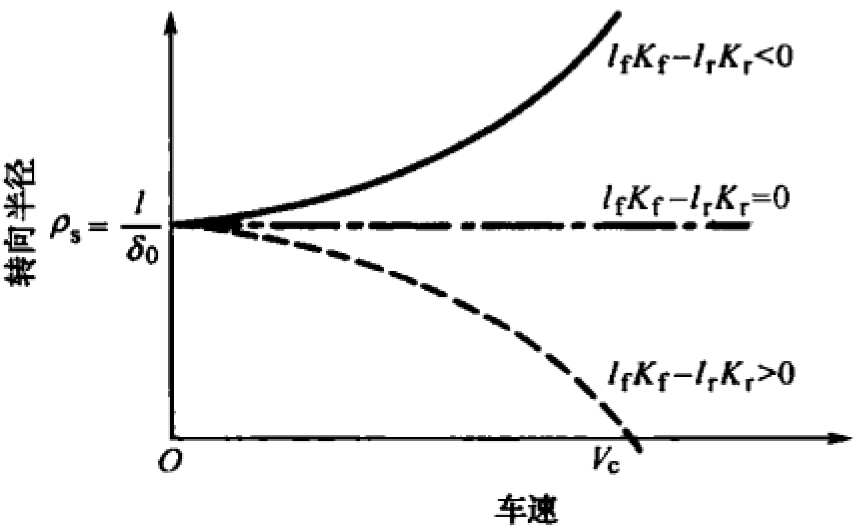


图 3.9　在固定转向角情况下转向半径与车速的关系

由式(3.37)或者图 3.9 可见，若转向角恒定，对满足 $l_fK_f-l_rK_r=0$ 的车辆而言，其转向半径 ρ 将与 V 无关，也就是说，无论车速如何，转向半径总是为一恒定值，且等于 l/δ_0。当 $l_fK_f-l_rK_r<0$ 时，车辆的转向半径随速度的增加而增大；当 $l_fK_f-l_rK_r>0$，车辆的转向半径随速度的增加而减小。对于后者，当 $V=V_c$ 时，$\rho=0$，也就是无曲率（V_c 的值及其意义将在后面的章节阐述）。这表明，以固定转向角作稳态转向运动的车辆，如车速增大，$l_fK_f-l_rK_r<0$ 的车辆将会驶出原来的圆周路径，并形成一个半径更大的圆周轨迹。而 $l_fK_f-l_rK_r>0$ 的车辆则相反，它将会驶入原来的圆周路径的内侧，并形成一个半径更小的圆周轨迹。以上情况如图 3.10 所示。

当 $l_fK_f-l_rK_r<0$ 时，若保持转向角不变而增加车速，要想维持原来的圆周路径半径，转向角就显得不足。这样一种相对于车速的增加转向角呈现不足的特性，我们称之为不足转向特性（以后简写为

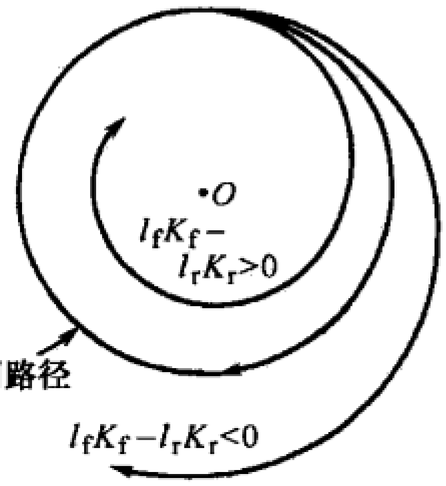


图 3.10　随着车速的增加回转半径的变化情况

US)。当 $l_fK_f-l_rK_r>0$，若保持转向角不变而增加车速，要想继续维持原来的圆周路径半径，转向角将会显得过大。这样一种相对于车速的增加转向角呈过大的特性被称为过多转向特性(以后写为 OS)。当 $l_fK_f-l_rK_r=0$ 时，转向半径与行驶速度的变化无关，这种特性被称为中性转向特性(以后写为 NS)。

接下来研究的是，要使车辆维持等半径稳态转向运动，所需的转向角 δ 应该如何随速度的变化而变化。设式(3.29)中 $\rho=\rho_0$(常数)，则有

$$\delta=\left(1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2\right)\frac{l}{\rho_0} \tag{3.38}$$

该式与式(3.37)的形式完全相同，典型的 δ 与 V 的关系如图 3.11 所示。要使车辆维持作固定半径的圆周运动，在 $l_fK_f-l_rK_r<0$ 时，必须随车速的增加而增大转向角。相反，在 $l_fK_f-l_rK_r>0$ 时，则应随车速的增大而减小转向角。而当 $V=V_c$ 时，$\delta=0$。此外，若 $l_fK_f-l_rK_r=0$，则 δ 独立于车速，即与车速无关。

当侧偏力正比于侧偏角，并且是仅有的作用于前、后轮的力时，车辆的圆周运动很大程度上受 $l_fK_f-l_rK_r$ 的影响。当 $l_fK_f-l_rK_r<0$ 时，车辆具有 US 特性；当 $l_fK_f-l_rK_r=0$ 时，车辆具有 NS 特性；当 $l_fK_f-l_rK_r>0$ 时，车辆具有 OS 特性。US、NS 和 OS 被统称为车辆的转向特性。

下面，考察作稳态转向的车辆，其横摆角速度 r 是如何随车辆的转向特性而变化的。横摆角速度由式(3.30)给出，由此，车辆以恒

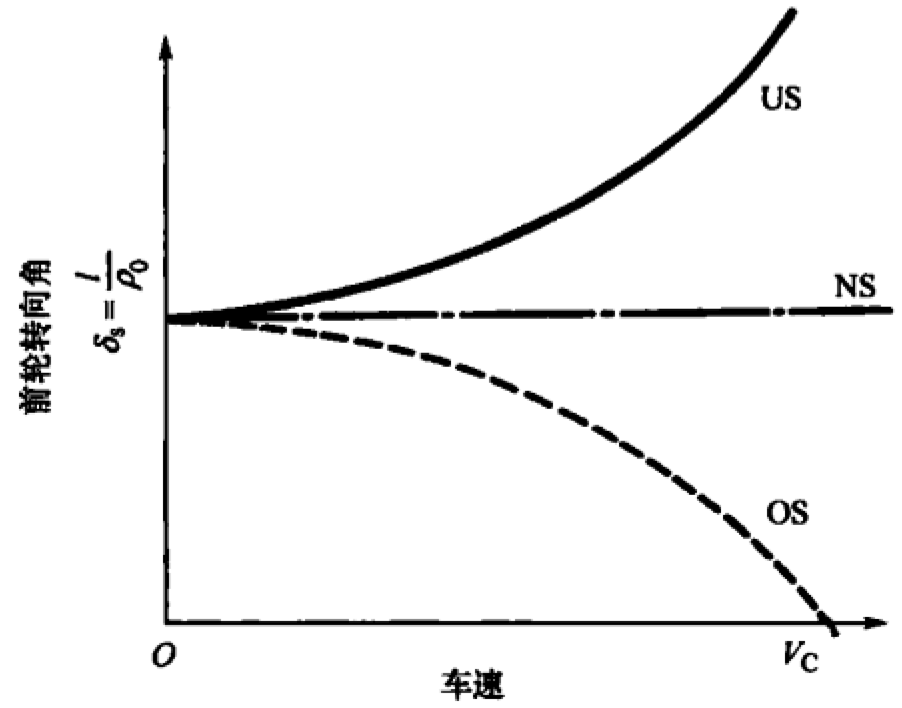


图 3.11

定转向角作稳态转向运动时，r 和 V 的关系可表示为

$$r=\frac{1}{1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2}\frac{V}{l}\delta_0 \tag{3.39}$$

根据上式，r 和 V 的关系可定性地绘出，如图 3.12 所示。

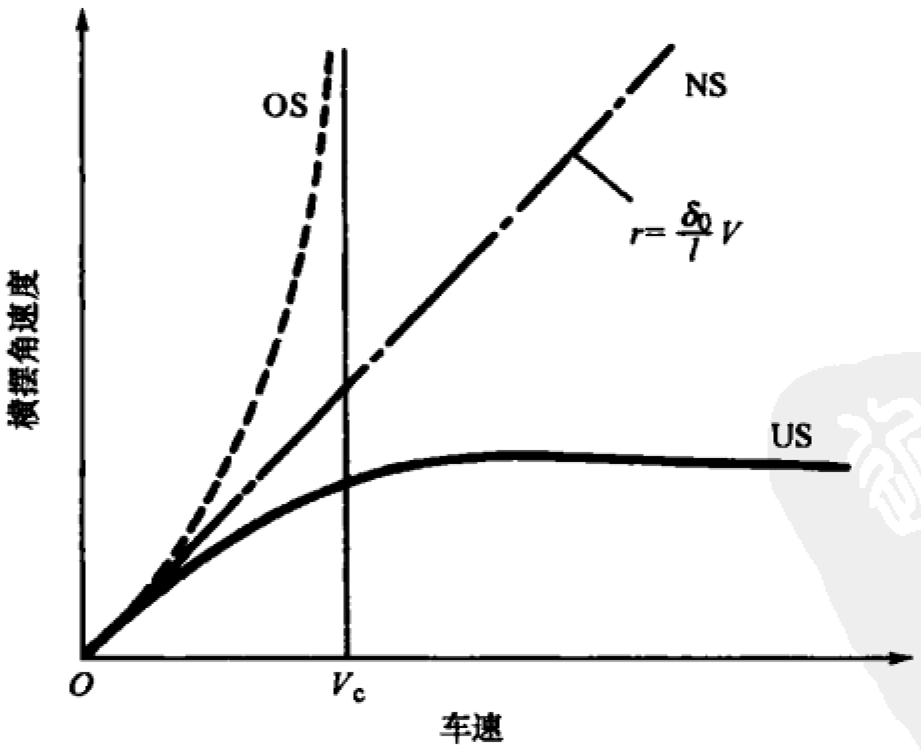


图 3.12　相对于车速的稳态横摆角速度

图 3.12 和式(3.39)表明，具有 NS 特性的车辆，其横摆角速度随速度呈线性增长。如果是车辆具有 US 特性，虽然其横摆角速度也随车速的增加而增大，但增大至某一值后会发生饱和而不再增大。如果车辆具有 OS 特性，其横摆角速度随车速的增加而迅速增大，直至到 $V=V_c$ 处为无穷大。

下面，考察稳态转向运动中车辆的质心侧偏角 β 随车速 V 的变化情况。质心侧偏角 β 由式(3.29)给出。设式中 $\delta=\delta_0$，则对以恒定转向角作稳态转向运动的车辆而言，其质心侧偏角和速度的关系为

$$\beta=\left(\frac{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f}{l_rK_r}V^2}{1-\dfrac{m}{2l^2}\dfrac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2}\right)\frac{l_r}{l}\delta_0 \tag{3.40}$$

按车辆转向特性的不同，质心侧偏角与车速的关系如图 3.13 所示。

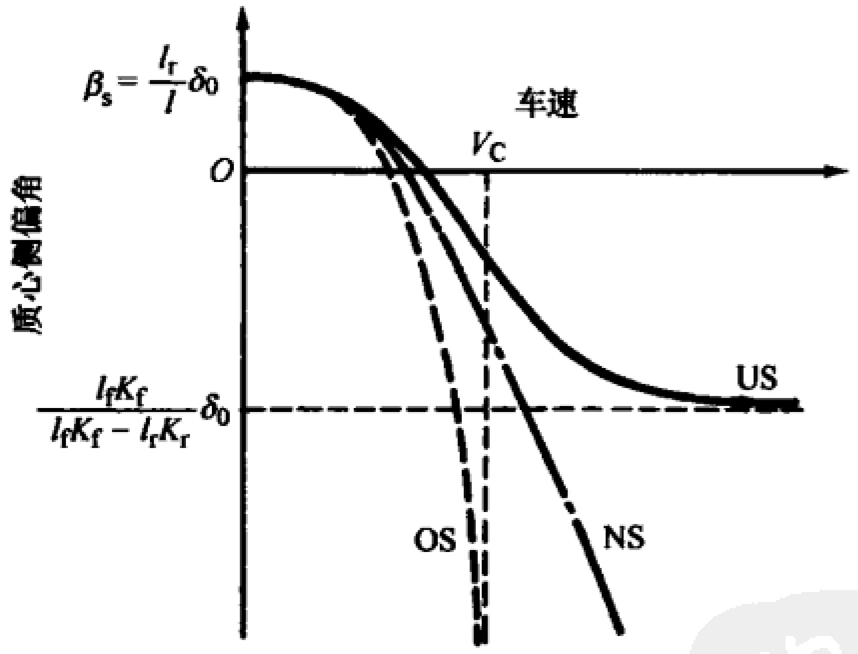
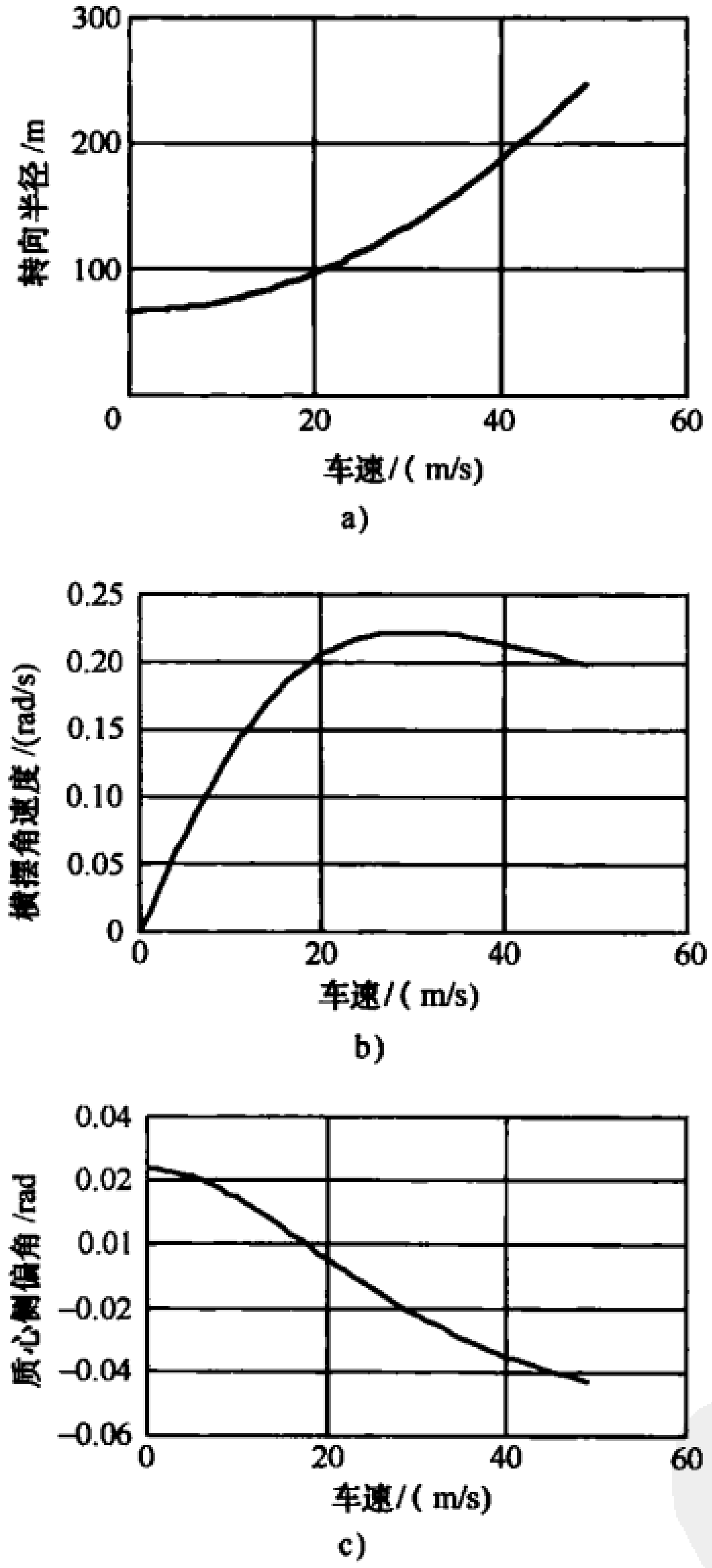


图 3.13　相对于车速的稳态质心侧偏角

例题 3.3

对一个普通的轿车，已知其参数：$m=1500\text{kg}$、$l_f=1.1\text{m}$、$l_r=1.6\text{m}$、$K_f=55\text{kN/rad}$、$K_r=60\text{kN/rad}$、$\delta_0=0.04\text{rad}$。计算其稳态转向特性，并画出 ρ-V 的关系曲线。

题解：采用式(3.37)、式(3.30)和式(3.40)，可以画出关系图，如例题图 3.3 所示。



例题 3.3 图　转向半径、横摆角速度和质心侧偏角相对于车速的关系
a）转向半径相对于车速的关系　b）横摆角速度相对于车速的关系　c）质心侧偏角相对于车速的关系

图 3.13 和式(3.40)表明，不管车辆的转向特性如何，β 都随车速的增加而减小。超过某一速度后，β 值变负，而其绝对值增大。如

果车辆呈 OS 特性，则 β 在 $V=V_c$ 处变为负无穷。如果车辆是 US 特性，β 会在某较高车速处达到饱和值。如果车辆呈现 NS 特性，不管车速如何，其转向角与转向半径或横摆角速度保持准静态的关系。具有 NS 特性（即 $l_fK_f-l_rK_r=0$）的车辆，其质心侧偏角 β 为

$$\beta=\left(1-\frac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right)\frac{l_r}{l}\delta_0 \tag{3.40'}$$

其中 β 并不保持为定值 $(l_r/l)\delta_0$，而是正比于 V^2，且绝对值增大。车辆的质心侧偏角之所以随车速变化、而与车辆的转向特性无关，原因是车辆需要侧向力来平衡离心力。车辆的质心侧偏角是车辆纵向与车辆质心行驶方向（即回转路径的切线方向）的夹角，它表明车辆在稳态转向运动中相对回转路径的姿态。随着车速的增加，侧偏角 β 变成负值，且其绝对值增大。表明当车速增大时，车头会指向圆周运动轨迹的内侧，如图 3.14 所示。对于具有 OS 特性的车辆，这种趋势会更加明显。

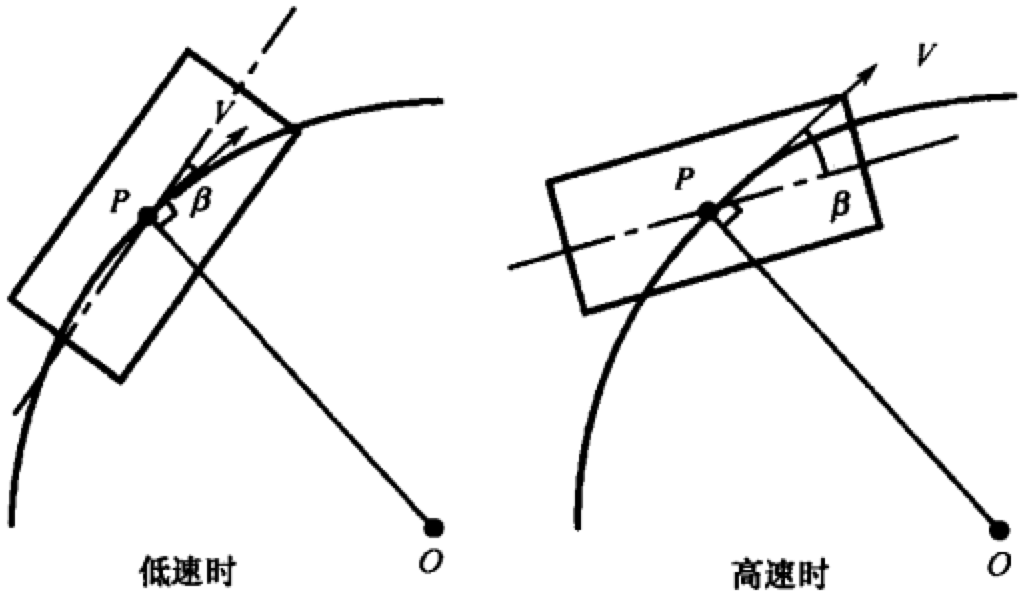


图 3.14　相对于圆周路径的车辆姿态

例题 3.4

当车辆作固定半径的等速圆周运动时，试推导其侧偏角与车速的关系公式。并定性地绘出其关系图。

题解：

当回转半径为 ρ_0 时，需要的转向角由式(3.38)表示。另一方面，以该转向角转弯过程中，车辆的质心侧偏角由式(3.29)给出。联立两式消去 δ，可得到以下方程：

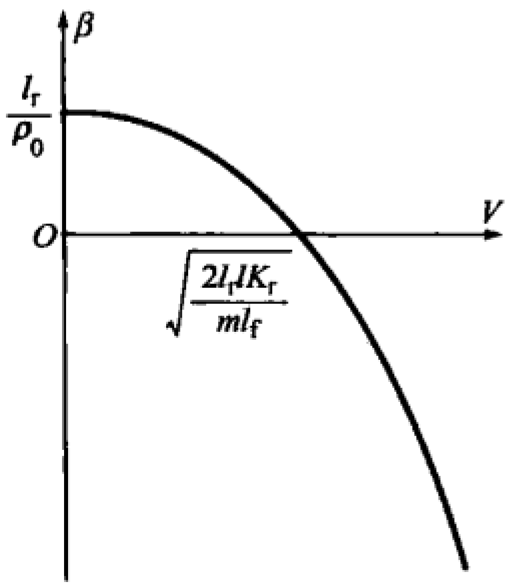
$$\beta = \left(1 - \frac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right)\frac{l_r}{\rho_0} \tag{E3.6}$$

上式表明，当车辆作固定半径 ρ_0 的稳态转向运动时，其质心侧偏角是如何随车速变化的。两者定性的关系由例题3.4图给出。可以有意思地发现，相对于不同的车辆转向特性(US、NS 和 OS)，侧偏角随车速的变化情况其实并无真正的区别。

2. 稳定性临界车速和稳定性因数

当车辆呈 OS 特性时，相对于恒定转向角，当车辆行驶速度 $V = V_c$ 时，其圆周转向半径 ρ 变为0。进一步说，横摆角速度 r 和侧偏角 β 为无穷大。当车速 $V > V_c$ 时，所得的 ρ、r 和 β 已无物理意义。V_c 可由下求解出：

$$1 - \frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f - l_rK_r}{K_fK_r}V^2 = 0 \tag{3.41}$$



例题3.4图　质心侧偏角相对于车速的变化

如果 $l_fK_f - l_rK_r > 0$，则车辆具有 OS 特性，存在满足方程式(3.41)的一个实数，即

$$V_c = \sqrt{\frac{2lK_fK_r}{m(K_f + K_r)}\left(-\frac{1}{SM}\right)} \tag{3.42}$$

当超出此车速时，车辆的圆周运动将不再可能进行下去了。

由式(3.42)可见，随着 $l_fK_f - l_rK_r$ 的减小，临界车速将变大。此外，当车辆的惯性质量 m 越小，前、后轮胎的侧偏刚度(即 K_f 和 K_r)越大，轴距 l 越大时，临界车速也随之增加。

当车辆呈 OS 特性时，特别值得注意的是，在 $V \geqslant V_c$ 的情况下，车辆运动的不稳定性是在前轮转向角固定的前提条件下推导出的，这并不表示车辆在超出 V_c 时就无法驾驶，还得取决于驾驶人的操纵能力。只是由于理论上存在一个稳定性临界车速，车辆设计者通常倾向于避免设计出呈 OS 特性的车辆。如果：

$$A = -\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f - l_rK_r}{K_fK_r} \tag{3.43}$$

式(3.41)变为

$$1 + AV^2 = 0 \tag{3.41'}$$

如果 $A<0$，V_c 可以写为

$$V_c = \sqrt{-\frac{1}{A}} \tag{3.42'}$$

式中，A 被称为稳定性因子。

若采用稳定性因子 A，车辆稳态转向运动中的 β、r、ρ 与 δ 的关系可分别写为

$$\beta = \frac{1 - \dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f}{l_r K_r}V^2}{1 + AV^2}\frac{l_r}{l}\delta \tag{3.29''}$$

$$r = \frac{1}{1 + AV^2}\frac{V}{l}\delta \tag{3.30''}$$

$$\rho = (1 + AV^2)\frac{l}{\delta} \tag{3.31''}$$

稳定性因子的符号决定着车辆的转向特性，它是相对于车速的一个表示稳态转向变化程度的重要指标。尤其是当 A 值一定时，稳态转向响应与 V^2 成正比。A 也被称为 US/OS 梯度。

由式(3.43)可见，虽然 $l_f K_f - l_r K_r$ 的正负决定着车速的影响，但如果车辆质量增大、轴距减小、轮胎的侧偏刚度(K_f 和 K_r)减小，同样也会增加车速的影响程度。

3. 静态裕度和中性转向点

车辆稳态转向特性取决于 $l_f K_f - l_r K_r$ 的符号，它对车辆的稳态转向有根本性的影响。在车辆动力学性能的讨论中，理解不足转向、中性转向和过多转向的概念极其重要。下面我们将更详细地研究 $l_f K_f - l_r K_r$ 数值的物理意义。

想象车辆在 $\delta = 0$ 的初始条件下，但由于某种原因产生了质心侧偏角 β。于是，在前、后车轮的轮胎处产生同样的侧偏角，因而将产生相应的轮胎侧偏力。这些偏向力会产生绕车辆质心的横摆力矩。根据式(3.13)，此力矩引起的横摆运动可表示为

$$I\frac{dr}{dt} + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}r = -2(l_f K_f - l_r K_r)\beta$$

若β为正、且$l_f K_f - l_r K_r$也为正时，一个绕车辆质心的力矩将产生负的横摆角速度，即使r减小；当$l_f K_f - l_r K_r$为0时，则无力矩作用；当$l_f K_f - l_r K_r$为负时，会有一个绕车辆质心的力矩使r增大。也就是说，若$l_f K_f - l_r K_r$为正时，则轮胎侧偏力的合力作用于车辆质心的前方；若$l_f K_f - l_r K_r$为0，合力作用点位于质心；若$l_f K_f - l_r K_r$为负时，合力的作用点位于车辆质心的后方。我们将合力的作用点称为中性转向点(以下写为NSP)。

若车辆质心处的侧偏角为β，则作用于前、后轮的侧向力分别为$2K_f\beta$和$2K_r\beta$。设NSP与车辆质心的距离为l_N，如图3.15所示，则由$2K_f\beta$和$2K_r\beta$绕NSP引起的力矩必须平衡，即

$$(l_f + l_N)2K_f\beta = (l_r - l_N)2K_r\beta$$

由上式，得:

$$l_N = -\frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f + K_r} \tag{3.44}$$

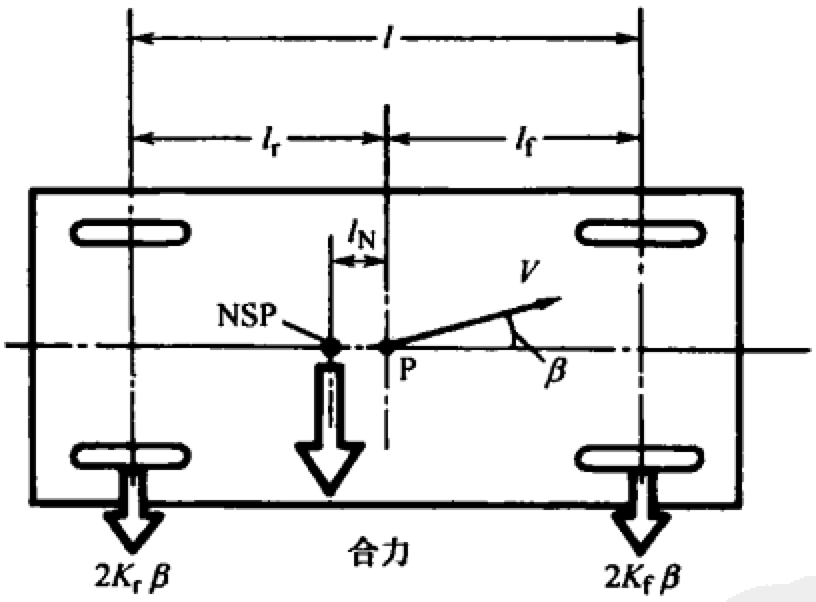


图3.15 由于车辆侧偏角引起的轮胎侧偏力的合力

当$l_f K_f - l_r K_r$为正时，NSP在质心的前方；当$l_f K_f - l_r K_r$为负时，NSP在质心的后方；当$l_f K_f - l_r K_r$为0时，NSP与质心重合。

以l_N除以轴距l，得出的这个无量纲的量被称为为静态裕度(以下写为SM)，即

$$SM = \frac{l_N}{l} = -\frac{l_f K_f - l_r K_r}{l(K_f + K_r)} \tag{3.45}$$

或者将方程(3.45)变换形式，也可写成如下形式：

$$\mathrm{SM}=-\frac{l_f}{l}+\frac{K_r}{K_f+K_r} \tag{3.45'}$$

由上所述，决定车辆转向特性的 $l_fK_f-l_rK_r$ 值可以用静态裕度 SM 的形式重新表达。车辆的转向特性能够用 SM 定义如下：

当 SM >0，则为 US；

当 SM =0，则为 NS；

当 SM <0，则为 OS。

此外，如果用 SM 表示临界车速 V_c，则为

$$V_c=\sqrt{\frac{2lK_fK_r}{m(K_f+K_r)}\left(-\frac{1}{\mathrm{SM}}\right)} \tag{3.42''}$$

用 SM 表示稳定性因子 A，则有：

$$A=\frac{m}{2l}\frac{K_f+K_r}{K_fK_r}\mathrm{SM} \tag{3.43'}$$

4. 转向特性和几何表达

通过由车辆基本运动方程导出的稳态转向公式，我们已经考察了车辆的稳态转向特性。但这些公式是在轮胎侧偏力正比于其侧偏角的条件下导出的。

下面，将不受上述条件的约束，采用几何意义上表示的稳态转向公式从更加实际的角度来研究车辆的稳态转向特性。

根据车辆稳态转向运动的几何学描述，所导出的转向半径 ρ 与 β_f 和 β_r 之间的关系由式(3.34)给出如下：

$$\rho=\frac{l}{\delta-\beta_f+\beta_r} \tag{3.34}$$

由上式可以看出，ρ 与 β_f 和 β_r 之间的关系取决于轮胎侧偏角(β_f 和 β_r)的大小，具体表示如下：

当 $\beta_f-\beta_r>0$ 时，则有 $\rho>\frac{l}{\delta}$，$\delta>\frac{l}{\rho}$

当 $\beta_f-\beta_r=0$ 时，则有 $\rho=\frac{l}{\delta}$，$\delta=\frac{l}{\rho}$

当 $\beta_f-\beta_r<0$ 时，则有 $\rho<\frac{l}{\delta}$，$\delta<\frac{l}{\rho}$

也就是说，对车辆前、后轮胎的侧偏角（β_f 和 β_r）而言，若 $\beta_f < \beta_r$，且转向角固定，则随车速的增大，转向半径将变大，要保持转向半径不变，就需要更大的转向角。若 $\beta_f > \beta_r$，且转向角固定，则随着速度的增大，转向半径将变小，要保持转向半径不变，就需要减小转向角。因此，也可以如下定义车辆的转向特性：

当 $\beta_f - \beta_r > 0$ 时，则为 US；

当 $\beta_f - \beta_r = 0$ 时，则为 NS；

当 $\beta_f - \beta_r < 0$ 时，则为 OS。

该定义不受前、后轮是否作用有除轮胎侧偏力以外的侧向力的影响，与侧偏力是否与其侧偏角成正比也无关。图 3.16 表示恒定转向角情况下，车辆的圆周运动是如何随 β_f 与 β_r 之间关系的变化而变化的。

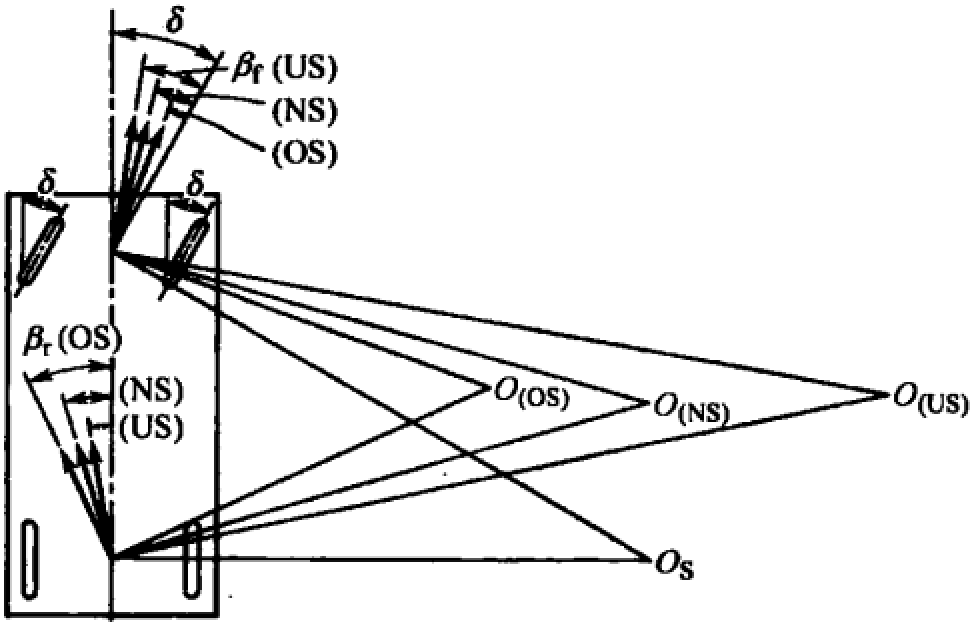


图 3.16　稳态转向车辆的前、后轮胎侧偏角

该图也表明，对呈 US 特性的车辆，其 $\beta_f > \beta_r$，则转向半径会大于 l/δ；若车辆呈 NS 特性，且 $\beta_f = \beta_r$，则转向半径等于 l/δ；若车辆呈 OS 特性，其 $\beta_f < \beta_r$，则转向半径小于 l/δ。此外，不论车辆具有怎样的转向特性，随着车辆行驶速度的增加，β_f 和 β_r 均会增大。这会导致车辆圆周运动的回转中心向车辆的前方移动。所以，随着车速的增加，车辆会向圆周轨迹的内侧偏移。而对具有 OS 特性的车辆，这种趋势更为明显。

通过由 $\beta_f - \beta_r$ 的正负来考察车辆的 US 和 OS 特性，可以更好地

理解式(3.37)和式(3.38)中由 $l_fK_f - l_rK_r$ 的符号定义车辆转向特性的物理意义。稳态转向过程中，若作用于前、后轮的侧向力只正比于其侧偏角(β_f 和 β_r)，则由式(3.31)和式(3.34)，有

$$\frac{\rho}{l}(\beta_f - \beta_r) = -\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f - l_rK_r}{K_fK_r}V^2 = AV^2 \tag{3.46}$$

因此，不论是基于 $\beta_f - \beta_r$ 还是 $l_fK_f - l_rK_r$，对车辆转向特性的定义都是一致的，$\rho(\beta_f - \beta_r)/(lV^2)$ 相当于稳定性因子 A。

表 3.1 归纳了车辆作稳态转向时，不同转向特性之间的关系。

3.3.3　稳态转向和轮胎非线性特性

通过 3.3.2 小节对车辆稳态转向特性的研究，使我们对车辆动力学有了基本的了解，也研究了描述车辆动力学基本特性的一个重要概念，即车辆的稳态转向特性：不足转向 US、中性转向 NS 和过多转向 OS。前面我们假定，作用在前、后车轮的侧向力与其侧偏角成正比。然而，正如第 2 章所述，车辆的侧偏力可能与其侧偏角不成正比。在侧偏角较大或其他某些条件下，轮胎侧偏力会表现出非线性的特性。

本小节将研究轮胎非线性特性对车辆稳态转向特性的影响。若假定车辆正以如下的侧向加速度作稳态转向运动，即

$$\ddot{y} = \frac{V^2}{\rho g} \tag{3.47}$$

则作用在其质心的离心力为 $m\ddot{y}g$，其中 g 为重力加速度($\ddot{y}$ 中含有重力加速度的原因是为了研究方便)。上式必须与作用于前、后车轮的侧向力相平衡，同时绕车辆质心的力矩应为 0。于是，有

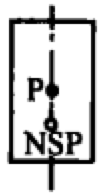
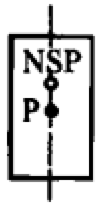
$$m\ddot{y}g + 2Y_f + 2Y_r = 0$$

$$2l_fY_f - 2l_rY_r = 0$$

因此，得：

$$\begin{aligned} 2Y_f &= -mg\frac{l_r}{l}\ddot{y} \\ 2Y_r &= -mg\frac{l_f}{l}\ddot{y} \end{aligned} \tag{3.48}$$

表 3.1　转向特性和稳态转向

	$SM=\frac{-(l_fK_f-l_rK_r)}{l(K_f+K_r)}$	中性转向点(NSP)和质心(P)的位置关系	车速对圆周运动的影响				
			转向半径 ρ(前轮转角 δ 恒定)	前轮转角 δ(转向半径 ρ 恒定)	横摆角速度 r	前后轴侧偏角 β_f 和 β_r	极限车速
US	>0		随车速增加而增大	随车速增加而增大	随车速增加而增大，到某一极值后减小	$\beta_f>\beta_r$	无
NS	=0		不变 $\rho=\frac{l}{\delta}$	不变 $\delta=\frac{l}{\rho}$	与车速成正比增大	$\beta_f=\beta_r$	无
OS	<0		随车速增大而减小	随车速增大而减小	随车速增大而快速增大	$\beta_f<\beta_r$	常数，极限车速 $V_c=\sqrt{\frac{2K_fK_rl^2}{m(l_fK_f-l_rK_r)}}$

式中，mgl_r/l，mgl_f/l 分别为前、后车轮的垂直载荷。

设前、后车轮的侧向力与其垂直载荷之比分别为 μ_f 和 μ_r，根据式(3.48)，得：

$$\mu_f=\frac{|2Y_f|}{\frac{mgl_r}{l}}=\ddot{y}，\ \mu_r=\frac{|2Y_r|}{\frac{mgl_f}{l}}=\ddot{y} \tag{3.49}$$

这说明，车辆在稳态转向运动中，其前、后轮的垂直载荷与对应的侧偏力之比总是等于质心的侧向加速度 $\ddot{y}$。

假定由轮胎侧偏角引起的侧偏力是仅有的侧向力，则 μ_f 和 μ_r 分别仅由 β_f 和 β_r 决定。根据式(3.49)，便可清楚前、后轮的侧偏特性，即 $\beta_f-\mu_f$ 和 $\beta_r-\mu_r$ 的关系。如果车辆质心的侧向加速度 $\ddot{y}$ 已知，便可马上求出前、后轮的侧偏角 β_f 和 β_r 的大小。

对作稳态转向的车辆而言，不论其前、后轮侧偏力是否与其相应的侧偏角成正比，都有下式成立：

$$\rho=\frac{l}{\delta-\beta_f+\beta_r} \tag{3.50}$$

如果轮胎的特性是线性的，即

$$2Y_f=-K_f\beta_f$$
$$2Y_r=-K_r\beta_r$$

由式(3.48)，可得：

$$\beta_f=\frac{mgl_r}{2K_fl}\ddot{y}$$

$$\beta_r=\frac{mgl_f}{2K_rl}\ddot{y}$$

这与 3.3.1 小节中的第二部分结尾部分的讨论相一致。将它们代入式(3.50)，可得：

$$\delta=\frac{l}{\rho}-\frac{mg(l_fK_f-l_rK_r)}{2K_fK_rl}\ddot{y} \tag{3.51}$$

因此，要使车辆以恒定的转向半径 $\rho=\rho_0$ 作圆周运动，其侧向加速度 $\ddot{y}$ 与所需的转向角 δ 之间的关系应为

$$\delta=\frac{l}{\rho_0}-\frac{mg(l_fK_f-l_rK_r)}{2K_fK_rl}\ddot{y} \tag{3.51'}$$

若作圆周运动的车辆行驶速度为恒定，即 $V=V_0$，则由式(3.47′)可得：

$$\rho=\frac{V_0^2}{\ddot{y}g}$$

由式(3.51′)，得侧向加速度 $\ddot{y}$ 与所需的转向角 δ 的关系为

$$\delta=\left[\frac{gl}{V_0^2}-\frac{mg(l_fK_f-l_rK_r)}{2K_fK_rl}\right]\ddot{y} \tag{3.51″}$$

根据式(3.51′)和式(3.51″)，若轮胎的侧偏特性为线性，则稳态转向车辆的 $\ddot{y}$ 与 δ 之间的关系如图 3.17 所示。

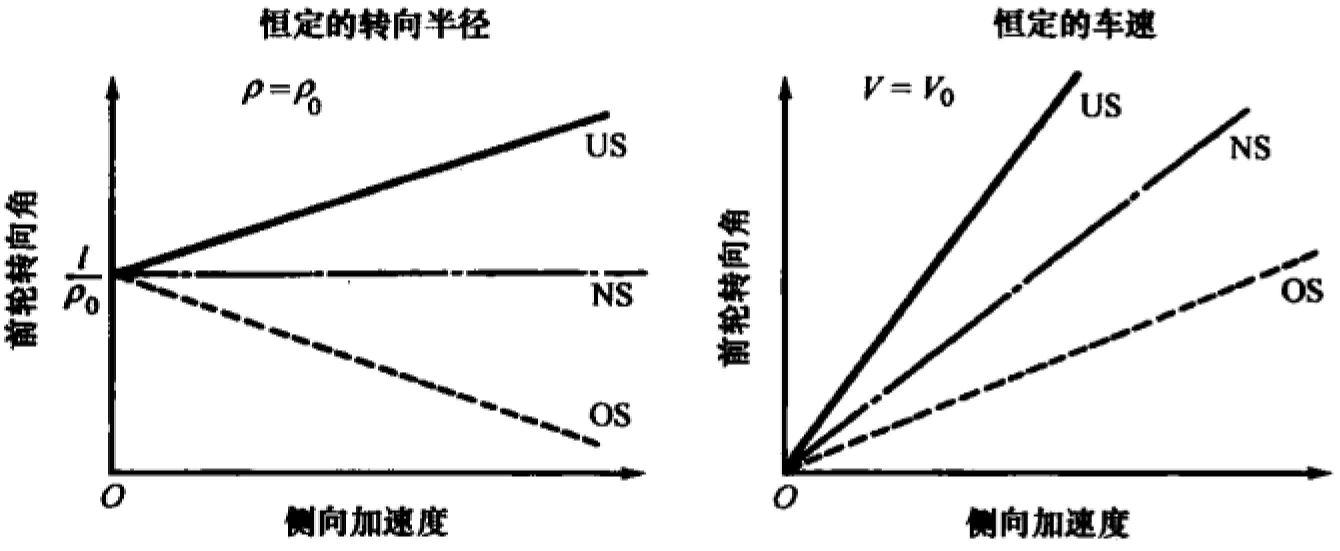


图 3.17　具有线性轮胎的车辆其侧向加速度与所需转向角的关系

当轮胎的侧偏特性为非线性时，前、后轮胎的侧偏特性(即 $\beta_f-\mu_f$ 和 $\beta_r-\mu_r$ 的关系)如图 3.18 所示。如前所述，如果车辆作稳态转向运动，其侧向加速度 $\ddot{y}$ 与 μ_f 和 μ_r 相等。因此，若知道了侧向加速度 $\ddot{y}$，即可确定前、后轮的侧偏角(β_f 和 β_r)，从而求得 $\beta_f-\beta_r$。

由式(3.50)，若圆周运动的转向半径为 ρ_0，那么：

$$\delta=\frac{l}{\rho_0}+\beta_f-\beta_r \tag{3.52}$$

给出 $\ddot{y}$、并由图 3.18 求 $\beta_f-\beta_r$ 之关系，则车辆以恒定转向半径作稳态转向时，其侧向加速度与转向角的关系如图 3.19 所示。

再考虑轮胎侧偏角，若 $\mu_f<\mu_r$，由于 $\beta_f>\beta_r$，车辆呈 US 特性；若 $\mu_f=\mu_r$，则 $\beta_f=\beta_r$，车辆呈 NS 特性；而当 $\mu_f>\mu_r$，则 $\beta_f<\beta_r$，所以车辆呈 OS 特性。

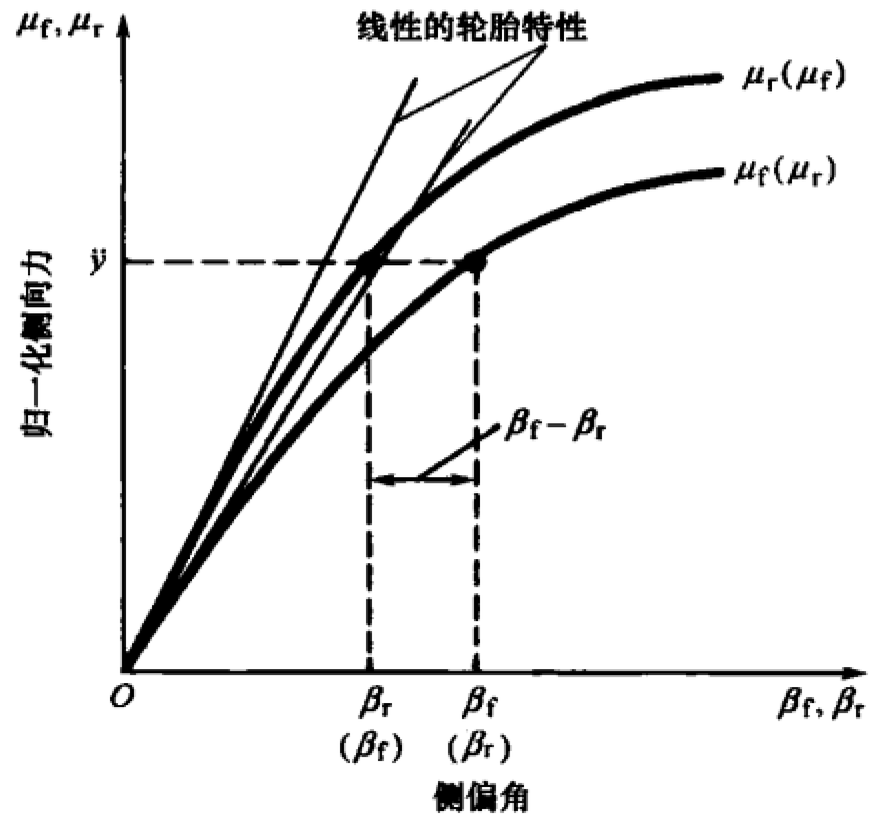


图 3.18　前后轮胎的非线性特性

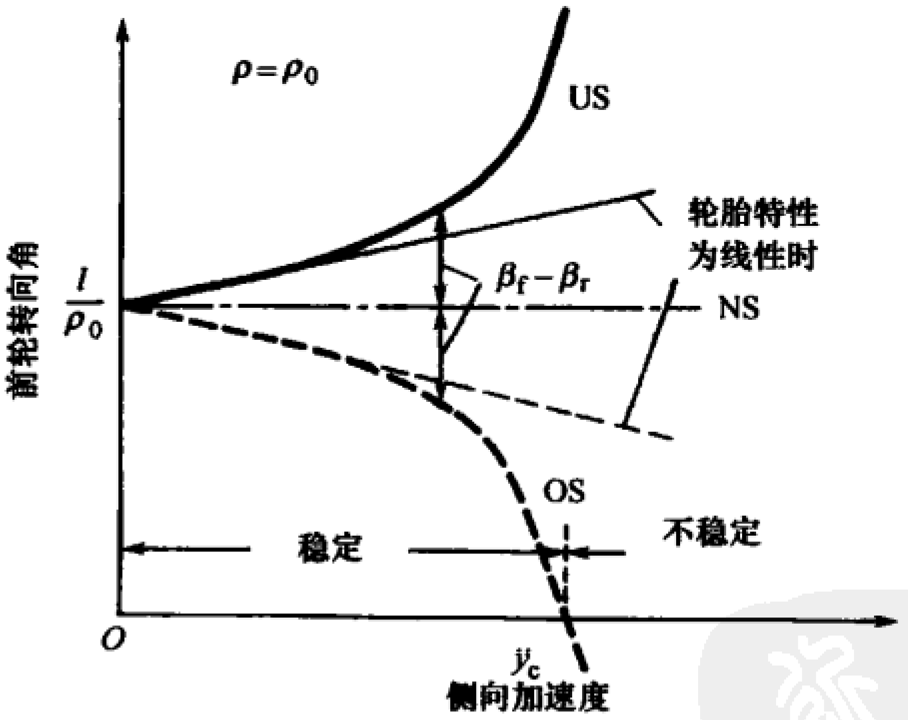


图 3.19　在恒定转向半径情况下车辆侧向加速度与转向角的关系

对具有如图 3.18 所示的 US 特性的车辆而言，若 $\ddot{y}$ 和轮胎侧偏角均很小，$\beta_f - \beta_r$ 为正，且几乎与 $\ddot{y}$ 成正比。这种场合下，也可以近似认为 $\ddot{y}$ 与 δ 就是成正比。当 $\ddot{y}$ 超出某特定值时，$\beta_f - \beta_r$ 不再与 $\ddot{y}$ 成正比，而是随着 $\ddot{y}$ 的增加迅速增大。于是，δ 也随 $\ddot{y}$ 迅速增大，车辆表

现出强 US 特性。与此相反，在车辆呈 OS 特性的情况下，当 $\ddot{y}$ 很小时，$\beta_f-\beta_r$ 值为负，且随着 $\ddot{y}$ 几乎成正比增长。同样的，δ 也随着 $\ddot{y}$ 成比例下降。当 $\ddot{y}$ 大于某特定值时，$\beta_f-\beta_r$ 随 $\ddot{y}$ 的增加迅速增大，这时车辆呈强 OS 特性。

对具有过多转向特性的车辆而言，随着 $\ddot{y}$ 的增大，δ 迅速减小。当 $\ddot{y}=\ddot{y}_c$ 时，$\delta=0$。该点定义了这样一个界限，作半径为 ρ_0 定圆运动的车辆，想通过提高其车速的办法来增大其侧向加速度是不可能的。此刻的 $\ddot{y}$ 值比轮胎特性为线性的情况还要小很多。对具有过多转向特性的车辆来说，轮胎的非线性特性进一步减小了其临界车速。由第 2 章可知，实际中的轮胎侧偏力在侧偏角超出一定范围后会达到饱和。特别需要注意的是，具有过多转向特性的车辆的不稳定车速可能会低于由轮胎侧偏特性为线性时求得的临界车速。另外，还与轮胎侧偏特性为线性的情况不同的是，作圆周运动的临界车速与圆周运动半径有关。

考虑车辆以恒定速度 $V=V_0$ 作圆周运动的情形。此时，$\rho=V_0^2/\ddot{y}g$，且其侧向加速度 $\ddot{y}$ 与所需的转向角 δ 的关系可由式(3.50)求得：

$$\delta=\frac{gl}{V_0^2}\ddot{y}+\beta_f-\beta_r \tag{3.53}$$

由于已知 $\ddot{y}$，因而 $\beta_f-\beta_r$ 的值又可由图 3.18 获得。采用式(3.53)，得到作等速圆周运动的车辆的前轮转向角与其侧向加速度的关系，如图 3.20 所示。

上图表明，若车辆为不足转向特性，当 $\ddot{y}$ 很小时，δ 与 $\ddot{y}$ 几乎成正比增加。但当 $\ddot{y}$ 达到某一特定值时，δ 随 $\ddot{y}$ 的增加而迅速增加，呈现出明显的不足转向特性。

与此相反，若车辆为过多转向特性，当 $\ddot{y}$ 很小时，δ 随 $\ddot{y}$ 几乎成正比增加，但当 $\ddot{y}$ 达到某特定值时，δ 随 $\ddot{y}$ 增长变弱，直至当 $\ddot{y}=\ddot{y}_c$ 时，δ 达到其峰值。当 $\ddot{y}>\ddot{y}_c$ 时，δ 随 $\ddot{y}$ 增大而减小。δ 的减小使恒定速度下的回转半径变小，表明车辆想要向右转的话，转向应该向左，现实中这是不可能的，且没有物理意义。也就是说，相应于 $\ddot{y}=\ddot{y}_c$，以更小的转向半径作圆周运动是不可能实现的。对于过多转向的车辆而言，不论车速如何，可以实现的转向半径总有一个下限。此外要说

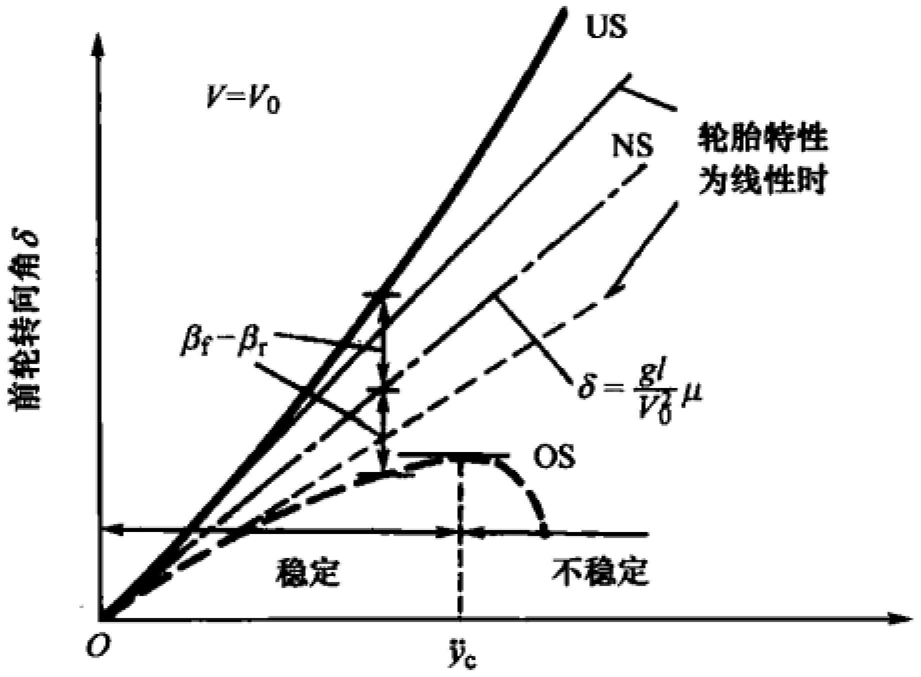


图 3.20　恒定车速下相对于侧向加速度的前轮转向角

明的是，图 3.19 中转向半径恒定时的 $\ddot{y}_c$ 与图 3.20 中行驶车速恒定时的 $\ddot{y}_c$ 具有相同的意义。

还要说明的是，图 3.18 给出的前、后轮胎的侧偏特性在整个侧偏角范围内总是表现为不同，不是 $\mu_f>\mu_r$ 就是 $\mu_f<\mu_r$。实际中并非绝对如此，要看具体情况而定。

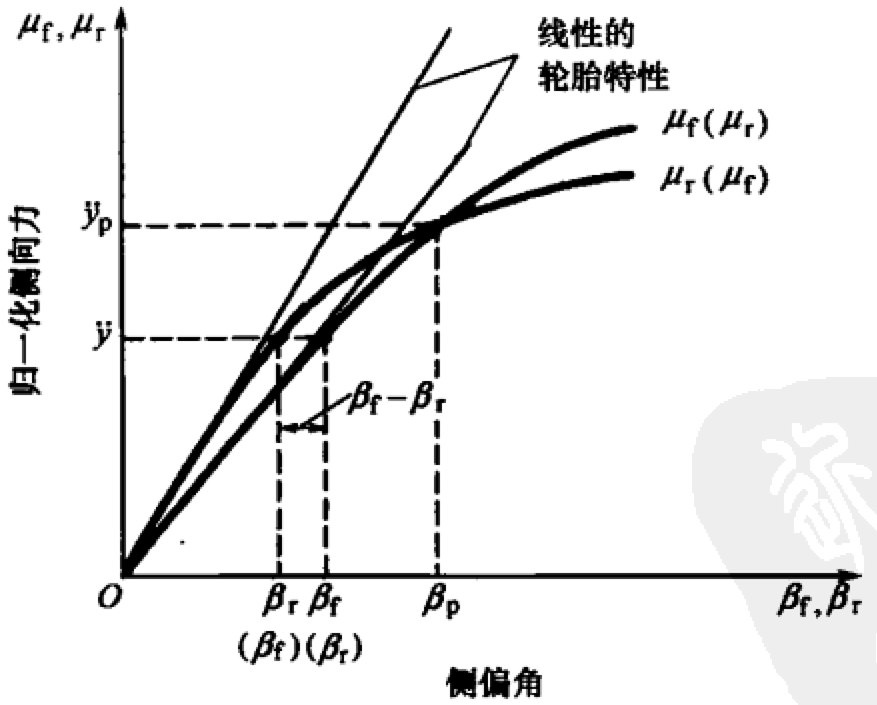


图 3.21　前、后轮胎的非线性特性

接下来我们考察前、后车轮轮胎的侧偏特性 $\beta_f-\mu_f$ 和 $\beta_r-\mu_r$，如

图 3.21 所示。定义(A)为这样一种情况，其中若 β_f 和 β_r 均小于 β_p，则 $\mu_f<\mu_r$；如果 β_f 和 β_r 均大于 β_p，那么 $\mu_f>\mu_r$。定义(B)为与此相反的情况，如果 β_f 和 β_r 均小于 β_p，那么 $\mu_f>\mu_r$；如果 β_f 和 β_r 均大于 β_p，则 $\mu_f<\mu_r$。

如果车辆以恒定半径 ρ_0 作圆周运动，式(3.52)如前同样成立。通过已知侧向加速度 $\ddot{y}$，则 $\beta_f-\beta_r$ 的关系可由图 3.21 确定。根据式(3.52)，可确定作固定半径圆周运动的车辆的转向角 δ 与其侧向加速度 $\ddot{y}$ 的关系，如图 3.22 所示。

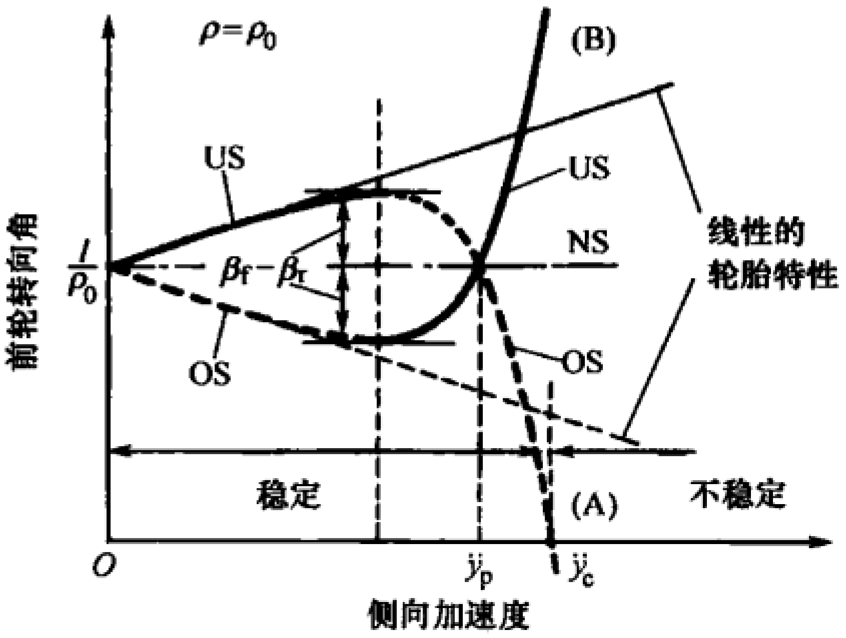


图 3.22　作定圆运动的车辆的转向角与侧向加速度的关系

在情况(A)中，当 $\ddot{y}$ 较小时，随着 $\ddot{y}$ 的增大，$\beta_f-\beta_r$ 增大，同时 δ 也增大，车辆呈 US 特性。当 $\ddot{y}$ 达到某特定值后，随着 $\ddot{y}$ 的增大，$\beta_f-\beta_r$ 减小；且当 $\ddot{y}=\ddot{y}_p$ 时，其值变为零。在 $\ddot{y}>\ddot{y}_p$ 时，$\beta_f-\beta_r$ 随着 $\ddot{y}$ 的增大急剧减小，车辆呈 OS 特性；而且当 $\ddot{y}$ 越大时，这种趋势就越明显。当 $\ddot{y}=\ddot{y}_p$ 时，$\delta=0$，表明此刻不可能以更高的侧向加速度作等半径 ρ_0 的定圆运动，正像图 3.19 所示的那样。

在情况(B)中，当 $\ddot{y}$ 较小时，δ 随着 $\ddot{y}$ 的增大而减小，车辆呈 OS 特性。当 $\ddot{y}$ 达到某特定值后，δ 随着 $\ddot{y}$ 的增大而增大，直至 $\ddot{y}=\ddot{y}_p$ 时，其值又回到 l/ρ_0。当 $\ddot{y}>\ddot{y}_p$ 时，δ 随 $\ddot{y}$ 的增大急剧增大，车辆呈强 US 特性。

如果车辆以 $V=V_0$ 的恒定速度作等速圆周运动，式(3.53)成立。

因此，若已知恒定侧向加速度 $\ddot{y}$，则 $\beta_f-\beta_r$ 可由图 3.21 确定，采用式(3.53)，车辆在作等速圆周运动时，其前轮转向角与其侧向加速度的关系也可以确定，如图 3.23 所示。

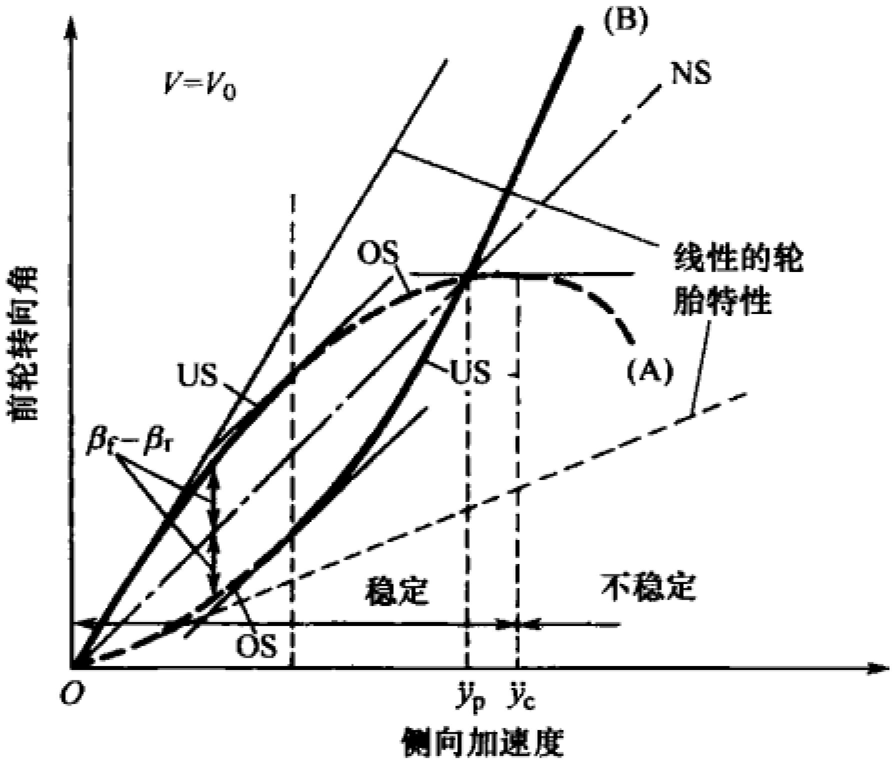


图 3.23　恒定车速下车辆的转向角与侧向加速度的关系

在情况(A)中，当 $\ddot{y}$ 较小时，车辆呈 US 特性，但当 $\ddot{y}$ 很大时，车辆变为 OS 特性。这使得车辆作对应于 $\ddot{y}=\ddot{y}_p$ 的那个半径下的圆周运动变为不可能。情况(B)与情况(A)正好相反，情况(B)下的 $\ddot{y}$ 变得较大时，车辆呈 US 特性。

如情况(A)所示，在 $\ddot{y}$ 较小时，车辆呈 US 特性。而当 $\ddot{y}$ 变大时，由于轮胎的非线性，车辆变为 OS 特性，且当超过某特定车速时，就不可能实现圆周运动。若基于线性轮胎的概念而无临界车速限制时，稳定的车辆在大侧向加速度区有可能会落入一个静态非稳定条件内。正像图 3.22 和图 3.23 所示的那样，由于 $\ddot{y}$ 的改变而导致的车辆转向特性的改变，我们称之为“逆转向特性”。

图 3.22 和 3.23 中还给出了情况(B)的情况，当侧向加速度变大时，车辆呈明显的 US 特性，不管转向角有多大，车辆都不能以超过特定值的侧向加速度作圆周运动。我们称这种状态为“车辆的漂移”。在情况(A)下，车辆呈明显的 OS 特性而变得静态失稳，我们称这种状态为“车辆的旋转”。

3.4 车辆的动态特性

在 3.3 节中，通过观察车辆的稳态转向运动，我们了解了车辆运动的基本特性。但是，目前为止所得到的这些结果还只能属于静态特性，也就是车辆运动的稳态特性。为了更详细地了解车辆的运动特性，我们还必须研究车辆的动态特性。

下面，我们将从不同角度来分析车辆对转向输入的瞬态响应，以此来进一步地理解车辆运动的基本特性。

3.4.1 车辆对转向输入的瞬态响应[1]

1. 瞬态响应和方向稳定性

描述车辆运动的基本方程式(3.12)和式(3.13)定义如下(参见 3.2 节)：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\delta \quad (3.12)$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \quad (3.13)$$

一旦给出了一个动力学系统的运动方程，如式(3.12)和式(3.13)，那么通过适当条件下对运动方程求解就可得到车辆对 δ 的响应。如果系统是线性的，那么就可通过直接求解其运动方程或者通过考察系统特征方程的根，来理解该动力学系统的瞬态响应。

作为我们研究目标的动力学系统，其特征方程由式(3.14)给出：

$$s^2+\left[\frac{2m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2I(K_f+K_r)}{mIV}\right]s+\left[\frac{4K_fK_rl^2}{mIV^2}-\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{I}\right]=0 \quad (3.54)$$

或

$$s^2+2Ds+P^2=0 \quad (3.55)$$

其中，

$$2D=\frac{2m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2I(K_f+K_r)}{mIV} \quad (3.56)$$

$$P^2=\frac{4K_fK_rl^2}{mIV^2}-\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{I} \tag{3.57}$$

并且，车辆的横摆转动惯量可写为

$$I=mk^2 \tag{3.58}$$

式中，k 被称为车辆的横摆力矩半径。

将式(3.58)代入式(3.56)，则 $2D$ 也可表示为以下形式：

$$2D=\frac{2}{mV}\left[(K_f+K_r)\left(\frac{1+\frac{k^2}{l_fl_r}}{\frac{k_2}{l_fl_r}}\right)+\frac{1}{k^2}(l_f-l_r)(l_fK_f-l_rK_r)\right] \tag{3.56'}$$

如果 $l_f\approx l_r$、$K_f\approx K_r$，则有

$$2D=\frac{2(K_f+K_r)}{mV}\left(\frac{1+\frac{k^2}{l_fl_r}}{\frac{k_2}{l_fl_r}}\right) \tag{3.56''}$$

将式(3.58)代入式(3.57)，P^2 可表示为

$$P^2=\frac{4K_fK_rl^2}{m^2k^2V^2}\left(1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2\right) \tag{3.57'}$$

那么，由式(3.55)给出的特征方程所表示的系统，其响应可由 $C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}$ 表示，其中 λ_1 和 λ_2 为特征方程的根：

$$\lambda_{1,2}=-D\pm\sqrt{D^2-P^2} \tag{3.59}$$

系统的瞬态响应特性及其稳定性取决于式(3.59)表示的特征根，即 λ_1 和 λ_2 是实数还是复数的情况。具体说，若 λ_1 和 λ_2 为实数，则由其正负决定；若 λ_1 和 λ_2 为复数，则由其实部的正负决定。根据式(3.59)，λ_1 和 λ_2 的值由 D 和 P 决定。由式(3.55)，显然有 $D>0$，因而车辆的瞬态响应特性及其稳定性可按 D 和 P 的情况作如下分类：

1）当 $D^2-P^2\geqslant0$、$P^2>0$ 时，则 λ_1 和 λ_2 为负实数，瞬态响应作无振荡衰减（系统稳定）。

2）当 $D^2-P^2<0$ 时，则 λ_1 和 λ_2 为复数，若其实部为负，瞬态响应作振荡衰减（系统稳定）。

3）当 $P^2\leqslant0$ 时，则 λ_1 和 λ_2 一个为负实数，一个为正实数，瞬

态响应为非振荡发散(系统不稳定)。

发生以上情况的前提是：车辆的转向输入是预先给定的，且不随车辆的状态而改变。但值得注意的是，车辆并不会始终呈现这样的状况，因为驾驶人会对车辆的稳定性起着关键作用。这种情形并非仅对车辆适用，船舶和飞机也同样如此。由处于运动体本身之上的驾驶人(在某些场合下即为控制执行器)来实现运动控制，这对运动体的运动来说，是一个重要的研究内容(详细的方法参见第9章)。

下面将对上述三种情况作具体研究，车辆对转向输入的响应及稳定性，分析什么样的车辆、在什么样的场合下会呈现第1)、第2)和第3)种情况下的运动特性。

首先，考虑第3）种情况。观察式(3.57)可知，由于 P^2 的第一项总为正，于是只有当第二项为负(即 $l_fK_f - l_rK_r > 0$)时，才可能有 $P^2 \leqslant 0$ 成立。设 $P^2 = 0$ 时的车速为 V_c，则由式(3.57′)得：

$$1 - \frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f - l_rK_r}{K_fK_r}V_c^2 = 0 \tag{3.60}$$

故有

$$V_c = \sqrt{\frac{2K_fK}{m(l_fK_f - l_rK_r)}}l = \sqrt{\frac{2lK_fK_r}{m(K_f + K_r)}\left(-\frac{1}{SM}\right)} \tag{3.61}$$

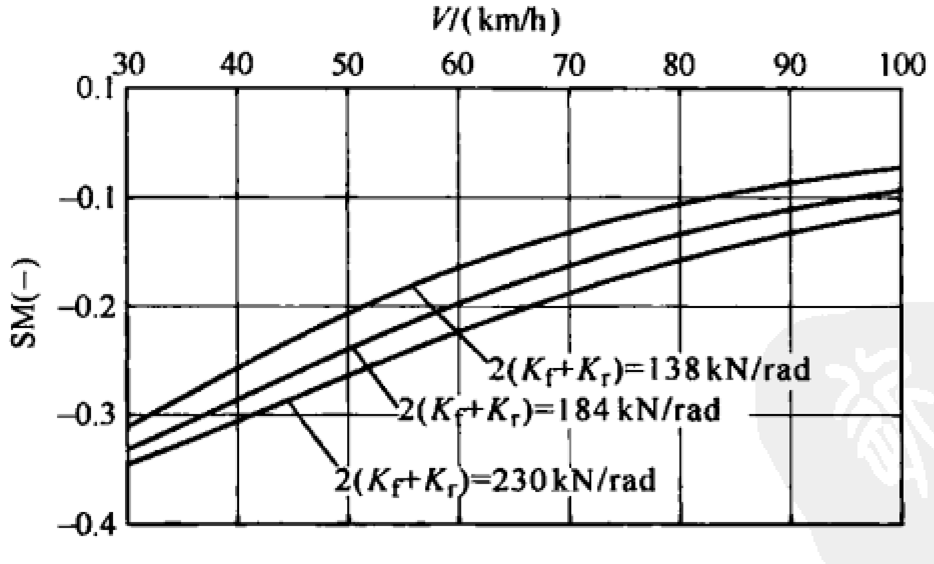


图 3.24 临界车速与 SM 的关系

对于所有大于 V_c 的车速均有 $P^2 \leqslant 0$ 成立，这就是前面第3.3.2小节中所描述的力学系统静态不稳定条件。若车辆呈过多转向特性，当其

车速为 V_c 时，车辆的侧向运动会变得不稳定，即对于一固定的转向输入，车辆运动会呈现非振荡发散。由式(3.61)可清楚地得知，这一稳定性界限很大程度上依赖于静态裕度 SM。图 3.24 给出了以车速和静态裕度所表示的稳定性界限。可以看出，SM 的绝对值越小，前、后轮的总侧偏刚度越大，则稳定性临界车速就越大。

例题 3.5

显然，车辆的稳定性条件可表示如下：

$$1-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}V^2\geqslant 0$$

试说明，要使车辆处于稳定状态，前、后轮的侧偏刚度应分别具有上限值和下限值。画出表示该上、下限值与车速的关系示意图。

题解：

上述不等式可改写如下：

$$\frac{2l^2}{mV^2}-\frac{l_f}{K_r}+\frac{l_r}{K_f}\geqslant 0$$

得到前轮侧偏刚度的上限值如下：

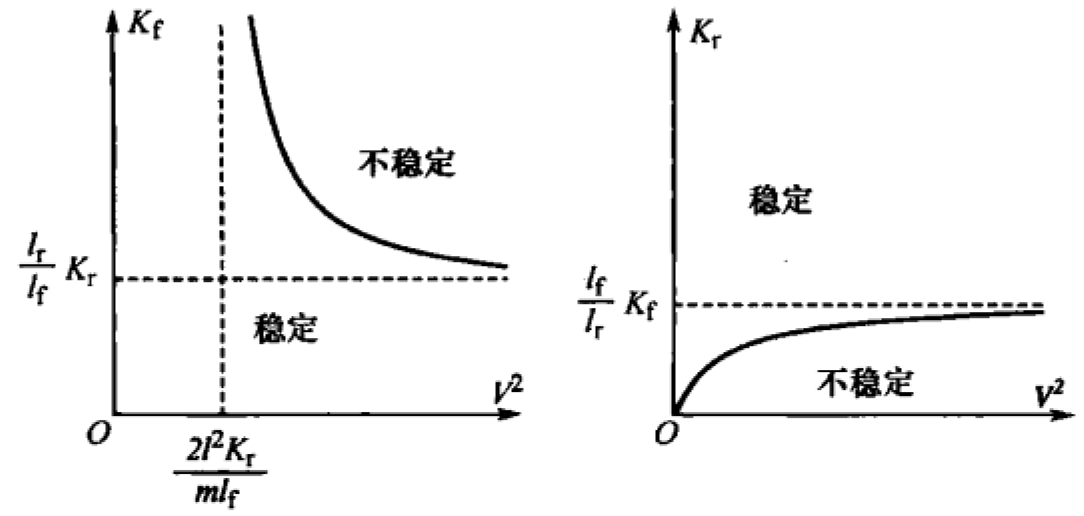
$$K_f\leqslant\frac{l_rK_r}{l_f}\frac{V^2}{V^2-\dfrac{2l^2K_r}{ml_f}} \tag{E3.7}$$

得到后轮侧偏刚度的上限值如下：

$$K_r\geqslant\frac{l_fK_f}{l_r}\frac{V^2}{V^2+\dfrac{2l^2K_f}{ml_r}} \tag{E3.8}$$

则得到前、后轮侧偏刚度的上限值和下限值与车速的关系示意图，如例题 3.5 图所示。

下面，若 $l_fK_f-l_rK_r<0$、车辆呈不足转向特性时，或虽然车辆表现过多转向特性、但 $V<V_c$ 时，那么 P^2 总是大于 0，车辆运动是稳定的。与其相对应的就是第 1）和第 2）种情况。现在我们根据式(3.56)和式(3.57)来求 D^2-P^2，有



例题 3.5 图　前、后轮侧偏刚度的上、下限值与车速的关系

$$D^2 - P^2 = \frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{I} + \left[\left(\frac{m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + I(K_f + K_r)}{mI}\right)^2 - \frac{4K_f K_r l^2}{mI}\right]\frac{1}{V^2} \tag{3.62}$$

将上式中 $1/V^2$ 的系数变形，则相应得到：

$$\left[\frac{m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) - I(K_f + K_r)}{mI}\right]^2 + \frac{4(l_f K_f - l_r K_r)^2}{mI} > 0 \tag{3.63}$$

可见，由于式(3.62)中 $1/V^2$ 的系数总是为正，所以如果式(3.62)第一项 $l_f K_f - l_r K_r$ 为正或为 0 时，那么 $D^2 - P^2$ 也为正或为 0。也就是说，若车辆的转向特性为过多转向或中性转向，则车辆对于转向输入的瞬态响应不管是否稳定，都总是非振荡的。当 $l_f K_f - l_r K_r$ 为负时，$D^2 - P^2$ 的值取决于 V，当超出某一特定车速后，$D^2 - P^2$ 由正变为负。也就是说，当车辆呈不足转向特性时，当车速低于该特定车速的情况下，车辆对转向输入的瞬态响应表现为非振荡的形式；一旦高于该特定车速，则其响应表现为振荡。

根据式(3.45)和式(3.58)，并假定 $l_f \approx l_r$，且 $K_f \approx K_r$，则由式(3.62)的变形式可计算 $D^2 - P^2$ 如下：

$$D^2 - P^2 = \frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{mk^2} + \left[\frac{(K_f + K_r)^2}{m^2}\left(\frac{1 - \frac{k^2}{l_f l_r}}{\frac{k^2}{l_f l_r}}\right)^2 + \frac{4(l_f K_f - l_r K_r)^2}{m^2 k^2}\right]\frac{1}{V^2}$$

$$\approx \frac{(K_f + K_r)^2}{m^2}\left\{-\frac{l_f l_r}{k^2}\frac{8m}{l(K_f + K_r)}\mathrm{SM} + \left[\left(\frac{1 - \frac{k^2}{l_f l_r}}{\frac{k^2}{l_f l_r}}\right)^2 + \frac{16 l_f l_r}{k^2}\mathrm{SM}^2\right]\frac{1}{V^2}\right\} \tag{3.62'}$$

由上式可见，如果 SM > 0（即车辆呈现不足转向特性）时，对转向输入的响应由非振荡变为振荡的临界车速 V_s 为

$$V_s = \sqrt{\frac{2l(K_f + K_r)}{m}\left[\frac{1}{16}\frac{\left(1 - \frac{k^2}{l_f l_r}\right)^2}{\frac{k^2}{l_f l_r}}\frac{1}{SM} + SM\right]} \qquad (3.64)$$

上式中，V_s 受 $k^2/l_f l_r$ 的影响。由式(3.64)可知，当 $k^2/l_f l_r = 1$ 时，V_s 达到最小，并且如果 $k^2/l_f l_r$ 大于或小于 1 时，V_s 就会变大。因此可以发现，有意思的是，当车辆的横摆转动惯量大于或小于某一定值时，车辆对转向输入的响应由非振荡向振荡变化的速度总是会增加。

以上分析表明，车辆对转向输入的瞬态响应特性与车辆行驶速度和转向特性尤为相关。表 3.2 对此作了归纳，有时也将表中所示的车辆运动的稳定性问题称为车辆的方向稳定性。图 3.25 为车辆对前轮转角阶跃输入的响应，清楚地表明了与表 3.2 中的第①、第②和第③种情况分别相对应的运动响应特性。

表 3.2　车辆的转向特性和瞬态响应

转向特性	瞬态响应	
US	$0 \leq V \leq V_s$	②振荡衰减 $V \geq V_s$
NS	①无振荡衰减	
OS	$0 \leq V \leq V_c$	③发散 $V \geq V_c$

2. 固有频率和阻尼比

接下来我们将研究车辆对转向输入响应的固有频率和阻尼比。设固有频率为 ω_n，阻尼比为 ζ，由特征方程的系数可得：

$$\omega_n^2 = P^2 \qquad (3.65)$$

$$2\zeta\omega_n = 2D \qquad (3.66)$$

故由式(3.56)、式(3.57)和式(3.43)，可求得 ω_n 和 ζ 分别如下：

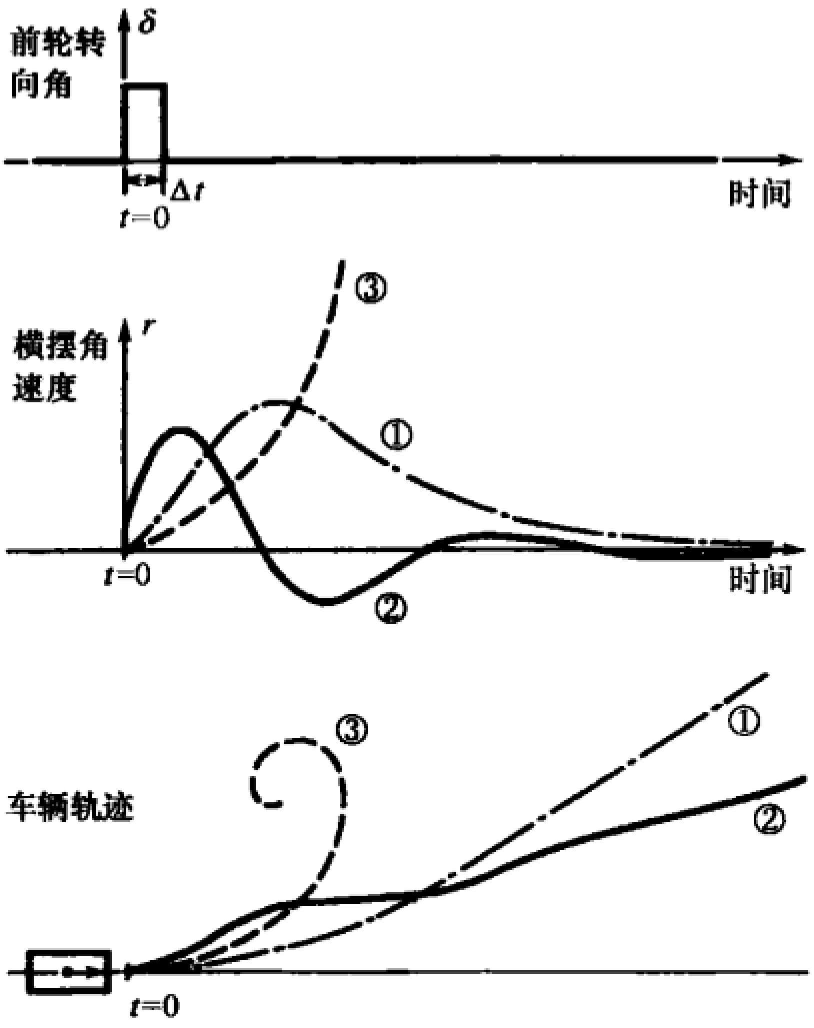


图 3.25　对车辆瞬态响应的定性理解

$$\omega_n = P = \frac{2l}{V}\frac{\sqrt{K_f K_r}}{\sqrt{mI}}\sqrt{1+AV^2} = \frac{2\sqrt{K_f K_r}l}{mk}\frac{\sqrt{1+AV^2}}{V}$$

$$= \frac{2\sqrt{K_f K_r}l}{mk}\frac{1}{V}\sqrt{1+\frac{m}{2l}\left(\frac{K_f+K_r}{K_f K_r}\right)\mathrm{SM}V^2} \tag{3.67}$$

$$\zeta = \frac{D}{P} = \frac{m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + I(K_f + K_r)}{2l\sqrt{mIK_f K_r(1+AV^2)}}$$

$$= \frac{K_f + K_r}{2\sqrt{K_f K_r}}\frac{k}{l}\frac{\left(\dfrac{1+\dfrac{k^2}{l_f l_r}}{\dfrac{k^2}{l_f l_r}}\right)+\dfrac{1}{k^2}\dfrac{(l_f - l_r)(l_f K_f - l_r K_r)}{K_f + K_r}}{\sqrt{1+AV^2}}$$

$$= \frac{K_f + K_r}{2\sqrt{K_f K_r}} \frac{k}{l} \frac{\left(\frac{1 + \frac{k^2}{l_f l_r}}{\frac{k^2}{l_f l_r}}\right) + \frac{1}{k^2} \frac{(l_f - l_r)(l_f K_f - l_r K_r)}{K_f + K_r}}{\sqrt{1 + \frac{m}{2l} \frac{K_f + K_r}{K_f K_r} \mathrm{SM} V^2}} \tag{3.68}$$

若 $l_f \approx l_r$ 且 $K_f \approx K_r$，则 ω_n 和 ζ 的近似值可以表示为

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2(K_f + K_r)}{mV} \sqrt{\frac{l_f l_r}{k^2}} \sqrt{1 + AV^2} \\ &= \frac{2(K_f + K_r)}{mV} \sqrt{\frac{l_f l_r}{k^2}} \sqrt{1 + \frac{2m}{l(K_f + K_r)} \mathrm{SM} V^2} \end{aligned} \tag{3.67'}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1 + \frac{k^2}{l_f l_r}}{2\sqrt{\frac{k^2}{l_f l_r}}} \frac{1}{\sqrt{1 + AV^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{k^2}{l_f l_r}}{2\sqrt{\frac{k^2}{l_f l_r}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{l(K_f + K_r)} \mathrm{SM} V^2}} \end{aligned} \tag{3.68'}$$

接下来研究车辆的固有频率和阻尼比是如何随车辆的转向特性和行驶速度而变化的。

相应于式(3.67′)，图 3.26 给出了 SM 和车速对固有频率影响的一个例子。由图可见，固有频率 ω_n 明显随车辆行驶速度的增大而减小，但它仅随 SM 的增大略有增加。

而相应于式(3.68′)，SM 和车速对阻尼比的影响由图 3.27 给出。由图可知，随 SM 的增大，阻尼比减小，从而车辆对于转向输入的响应也愈加振荡。再看 ζ 随车速增加的情况，当车辆呈不足转向特性时，ζ 随车速的增加而减小，车辆运动则变为小阻尼，从而会引发更多的振荡。当车辆呈过多转向特性时，ζ 会随车速的增加而增大，因而使车辆对转向输入的响应恶化。而若 $k^2/l_f l_r \approx 1$，当车辆呈中性转向特性时，或不论车辆的转向特性如何而 V 接近于 0 时，都有 $\zeta \approx 1$，

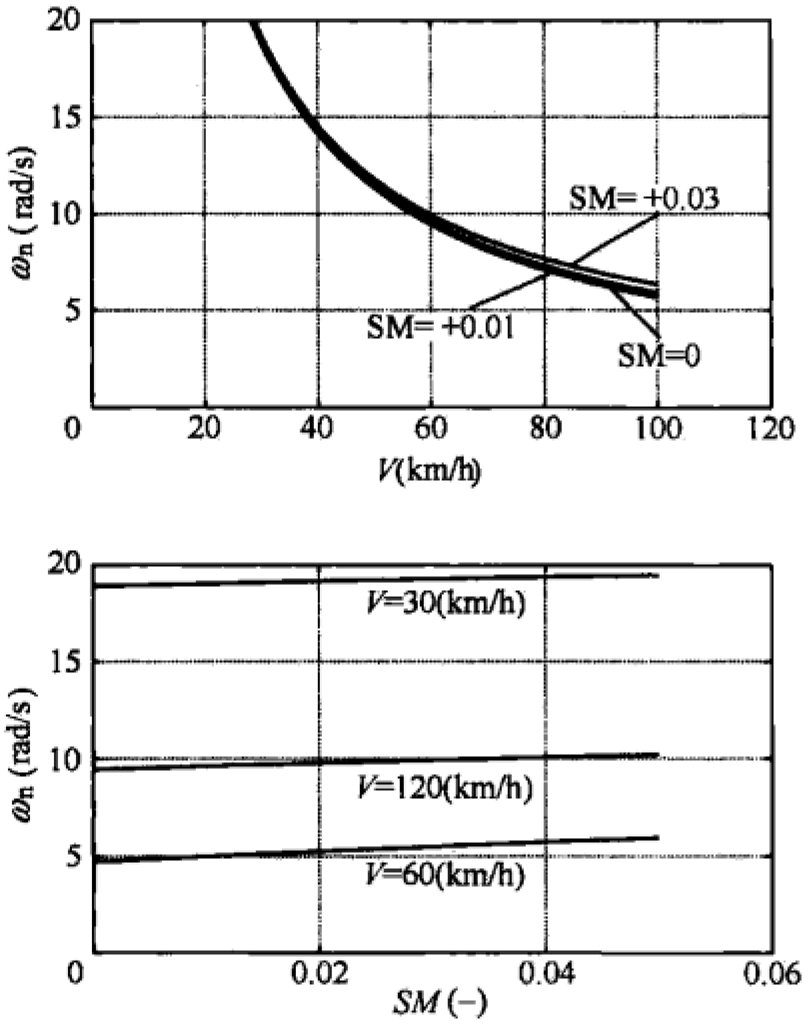


图 3.26　SM 和车速对固有频率 ω_n 的影响

这时我们可以认为车辆处于临界阻尼状态。

在 $\zeta<1.0$ 的情况下，车辆响应呈现为振荡时，如果 $l_f \approx l_r$ 且 $K_f \approx K_r$，那么系统阻尼固有频率可由式(3.62′)求得，即为

$$q=\sqrt{P^2-D^2}$$

$$=\frac{4(K_f+K_r)}{m}\sqrt{\frac{l_f l_r}{k^2}}\sqrt{\frac{m}{2l(K_f+K_r)}\mathrm{SM}-\left[\frac{1}{16}\frac{\left(1-\frac{k^2}{l_f l_r}\right)^2}{\frac{k^2}{l_f l_r}}+\mathrm{SM}^2\right]\frac{1}{V^2}} \quad (3.69)$$

并且它还等于 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

3. 响应性

至此为止，我们的研究重点一直是车辆对转向输入的瞬态响应是否振荡以及是否稳定。然而，对我们所讨论的车辆（还包括船舶和飞机）而言，对转向输入的响应性也是一个重要的特性。

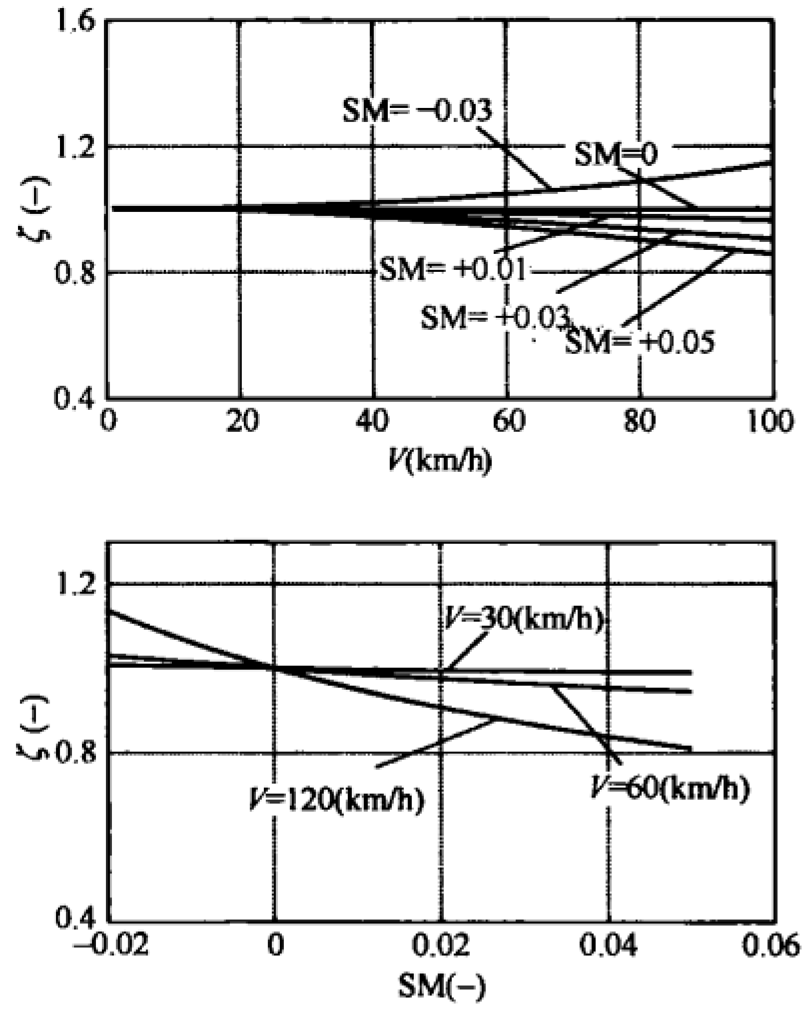


图 3.27　SM 和车速对阻尼比的影响

对稳定的线性系统而言，设其特征方程的特征根实部为 λ，则下式定义的响应时间就是表示其系统响应速度的一个参数，即

$$t_R = -\frac{1}{\lambda} \tag{3.70}$$

因此，当 $D^2 - P^2 \geqslant 0$ 时，t_R 为

$$t_R = \frac{1}{D \mp \sqrt{D^2 - P^2}} \tag{3.71}$$

对所研究的车辆而言，当在 $D^2 - P^2 < 0$ 时，有

$$t_R = \frac{1}{D} \tag{3.72}$$

如果 $l_f \approx l_r$ 且 $K_f \approx K_r$，则由式(3.56″)和式(3.62′)，可分别求得 $D^2 - P^2 \geqslant 0$ 和 $D^2 - P^2 < 0$ 时 t_R 的值如下：

$$t_R = \frac{\dfrac{mV}{K_f + K_r}\left(\dfrac{\dfrac{k^2}{l_f l_r}}{1 + \dfrac{k^2}{l_f l_r}}\right)}{1 \mp \dfrac{4V\sqrt{\dfrac{k^2}{l_f l_r}}}{1 + \dfrac{k^2}{l_f l_r}}\sqrt{\left[\dfrac{1}{16}\dfrac{\left(1 - \dfrac{k^2}{l_f l_r}\right)^2}{\dfrac{k^2}{l_f l_r}} + SM^2\right]\dfrac{1}{V^2} - \dfrac{mSM}{2l(K_f + K_r)}}}$$

$$（当\ D^2 - P^2 \geqslant 0\ 时） \tag{3.73}$$

$$t_R = \frac{mV}{K_f + K_r}\frac{\dfrac{k^2}{l_f l_r}}{1 + \dfrac{k^2}{l_f l_r}} \quad （当\ D^2 - P^2 < 0\ 时） \tag{3.74}$$

一般来说，大多情况下都有 $D^2 - P^2 \approx 0$。此时，上述两式相等，因而就可采用式(3.74)作为标准的车辆响应时间 t_R 的估算公式。

由上述讨论可知，车辆动态特性的基本性质(如固有频率 ω_n、阻尼比 ζ 以及响应时间 t_R)取决于车辆的行驶速度和以静态裕度 SM 衡量的转向特性。同时，如果 $l_f \approx l_r$ 且 $K_f \approx K_r$，则车辆质量与轮胎侧偏刚度之比 $m/(K_f + K_r)$、轴距 l 以及由轴距和车辆质心位置决定的横摆转动惯量 $k^2/l_f l_r$ 也影响着瞬态响应。尤其值得注意的是，横摆转动惯量以 $k^2/l_f l_r$ 的形式真正地影响着车辆的动态特性。

3.4.2 转向输入响应的传递函数和响应时间历程

前面我们研究了车辆对转向输入瞬态响应的特性，采用的手段只是通过考察其特征方程及其特征根，而非直接通过求解描述车辆运动的基本运动方程式(3.12)和式(3.13)来研究。

下面，我们考察一下基本运动方程式(3.12)和式(3.13)，并对其两边进行拉普拉斯变换，得：

$$[mVs + 2(K_f + K_r)]\beta(s) + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r)\right]r(s) = 2K_f\delta(s) \tag{3.75}$$

$$2(l_f K_f - l_r K_r)\beta(s) + \left[Is + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}\right]r(s) = 2l_f K_f\delta(s) \tag{3.76}$$

式中，s 为拉普拉斯算子，$\beta(s)$、$r(s)$ 和 $\delta(s)$ 分别表示对 β、r 和 δ 的拉普拉斯变换。

对 $\beta(s)$ 和 $r(s)$ 求解其代数方程，可得：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=\frac{\begin{vmatrix} 2K_f & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ l_fK_f & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}} \tag{3.77}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & 2K_f \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & 2l_fK_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}} \tag{3.78}$$

然后，用前面导出的 ω_n 和 ζ 表示之，式(3.77)和式(3.78)可改写为：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=G_\delta^\beta(0)\frac{1+T_\beta s}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}} \tag{3.77'}$$

其中，

$$G_\delta^\beta(0)=\frac{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f}{l_rK_r}V^2}{1+AV^2}\frac{l_r}{l} \tag{3.79}$$

$$T_\beta=\frac{IV}{2ll_rK_r}\frac{1}{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f}{l_rK_r}V^2} \tag{3.80}$$

并且有

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=G_\delta^r(0)\frac{1+T_r s}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}} \tag{3.78'}$$

$$G_\delta^r(0)=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V}{l} \tag{3.81}$$

$$T_r = \frac{ml_f V}{2lK_r} \tag{3.82}$$

$G_\delta^\beta(0)$为车辆质心侧偏角增益常数，是车辆作稳态转向时其侧偏角β相对于其转向角δ的稳态值，$G_\delta^r(0)$为横摆角速度增益常数，是稳态转向中横摆角速度r相应于转向角δ的稳态值。式(3.77′)和式(3.78′)分别是侧偏角β和横摆角速度r对转向输入δ的传递函数。

如果以式(3.77)和式(3.78)或式(3.77′)和式(3.78′)的形式给出β和r对δ的拉氏变换响应，则可通过反拉氏变换求出相应于某给定的δ，车辆的β和r的响应。当车辆直线行驶时，瞬间给其一个阶跃转向输入，那么车辆的响应可由下式求得：

$$\beta(t) = L^{-1}\ [\beta\ (s)]\ = L^{-1}\left[G_\delta^\beta(0)\frac{1+T_\beta s}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}\frac{\delta_0}{s}\right] \tag{3.83}$$

$$r(t) = L^{-1}\ [r\ (s)]\ = L^{-1}\left[G_\delta^r(0)\frac{1+T_r s}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}\frac{\delta_0}{s}\right] \tag{3.84}$$

式中，L^{-1}表示拉普拉斯逆变换；$\delta(s)$表示幅值为δ_0的角阶跃输入；δ_0/s是拉普拉斯变换后的转向角。

对上面方程进行拉普拉斯变换，并设β和r的初始值为0。当车辆表现为非振荡响应(即$\zeta>1$)时，$\beta(t)$和$r(t)$如下：

$$\beta(t) = G_\delta^\beta(0)\delta_0\left[1+\frac{1-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n T_\beta}{2(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}}e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right.$$
$$\left.-\frac{1-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n T_\beta}{2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}}e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right] \tag{3.83′}$$

$$r(t) = G_\delta^r(0)\delta_0\left[1+\frac{1-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n T_r}{2(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}}e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right.$$
$$\left.-\frac{1-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n T_r}{2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}}e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right] \tag{3.84′}$$

当车辆响应为无振荡的临界状态(即$\zeta=1$)时，有：

$$\beta(t) = G_\delta^\beta(0)\delta_0\{1+[(\omega_n^2 T_\beta-\omega_n)t-1]e^{-\omega_n t}\} \tag{3.83″}$$

$$r(t)=G_{\delta}^{r}(0)\delta_0\{1+[(\omega_n^2T_r-\omega_n)t-1]e^{-\omega_n t}\} \tag{3.84''}$$

当车辆响应为有振荡(即 $\zeta<1$)时，则有

$$\beta(t)=G_{\delta}^{\beta}(0)\delta_0\left[1+\frac{T_\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\times\right.$$

$$\left.\sqrt{\left(\frac{1}{T_\beta}-\zeta\omega_n\right)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\Psi_\beta)\right] \tag{3.83'''}$$

其中

$$\Psi_\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\frac{1}{T_\beta}-\zeta\omega_n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right)$$

$$r(t)=G_{\delta}^{r}(0)\delta_0\left[1+\frac{T_r}{\sqrt{1-\zeta^2}}\times\right.$$

$$\left.\sqrt{\left(\frac{1}{T_r}-\zeta\omega_n\right)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\Psi_r)\right] \tag{3.83'''}$$

其中

$$\Psi_r=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\frac{1}{T_r}-\zeta\omega_n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right)$$

关于车辆对转向输入的响应性，除了前述的响应时间外，还可由当横摆角速度达到稳态的时间 t_e 以及达到第一个振荡峰值的时间 t_p 来表示，如图 3.28 所示。

关于 t_e 和 t_p 的计算公式如下：

$$t_e=\frac{1}{\omega_n^2T_r} \tag{3.85}$$

$$t_p=\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_nT_r}{1-\zeta\omega_nT_r}\right)\right] \tag{3.86}$$

特别情况下，我们可以用 t_p 来近似表示横摆角速度的响应时间。

为了观察车辆对转向输入响应的时间历程，采用式(3.83′)～式

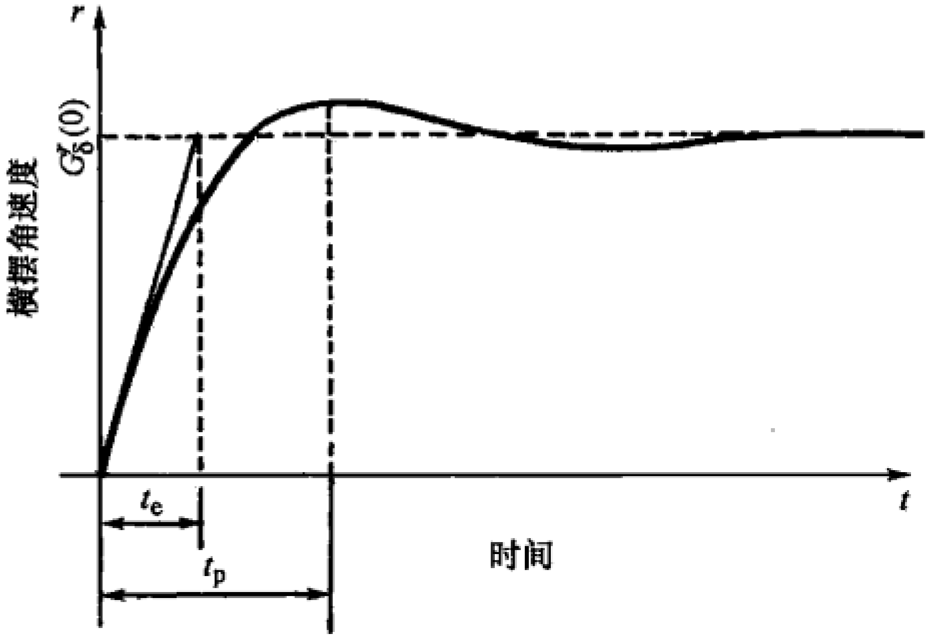


图 3.28 横摆角速度的响应性

(3.84″)是可行的。然而，近年来有了一个更容易的方法，那就是通过装有一些仿真软件(如 Matlab-Simulink)的个人计算机(PC 机)来数值仿真车辆的运动方程。改写式(3.12)和式(3.13)为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{2(K_f + K_r)}{mV}\beta - \left[1 + \frac{2}{mV^2}(l_f K_f - l_r K_r)\right]r + \frac{2K_f}{mV}\delta \quad (3.12')$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{I}\beta - \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{IV}r + \frac{2l_f K_f}{I}\delta \quad (3.13')$$

通过对以上两式的右边积分，可分别求出侧偏角和横摆角速度。车辆对转向输入的运动响应可由一个集成形式的框图表示，如图 3.29 所示，这样的框图是应用 Matlab-Simulink 软件实现仿真程序的基础。

例题 3.6

试用 Matlab-Simulink 对车辆在阶跃转向输入下的响应进行仿真，其中 $\delta = 0.04\text{rad}$，车速分别为 60km/h、100km/h 和 140km/h，车辆参数：$m = 1500\text{kg}$，$I = 2500\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$l_f = 1.1\text{m}$，$l_r = 1.6\text{m}$，$K_f = 55\text{kN/rad}$，$K_r = 60\text{kN/rad}$。

题解：

仿真中车辆参数的设置如例题 3.6 图 a 所示。仿真程序框图如例题 3.6 图 b 所示，其中一个仿真条件如例题 3.6 图 c 所示。例题 3.6 图 d 为其中一个仿真结果，而全部的仿真结果如例题 3.6 图 e 所示。

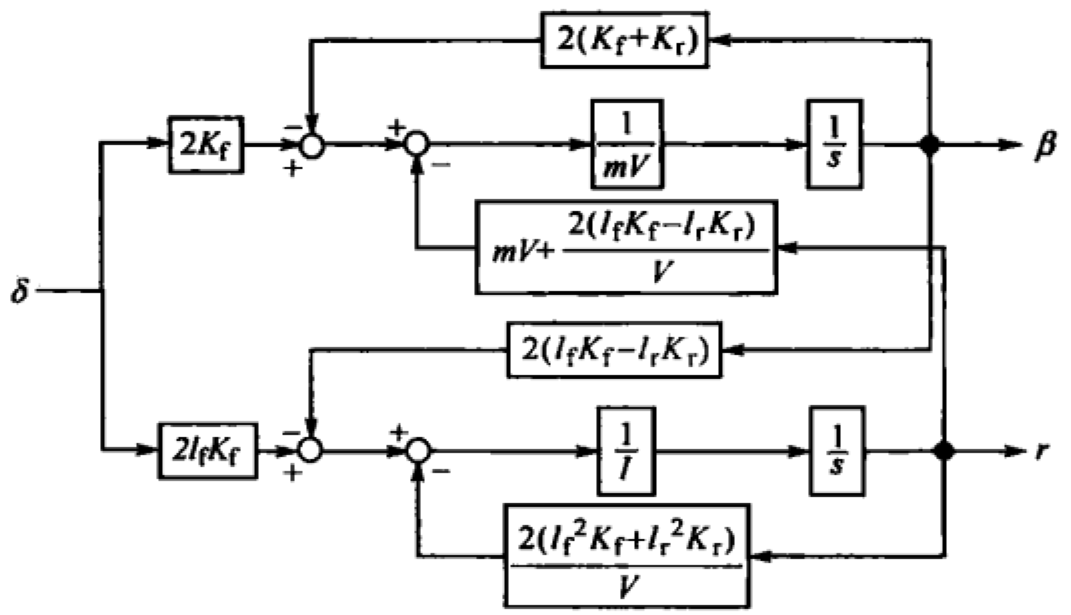


图 3.29　车辆对转向输入的运动响应

如果车辆运动是由地面固定坐标系所描述的，则可得到式(3.21)和式(3.22)，对其进行拉普拉斯变换，得：

$$\left[ms^2+\frac{2(K_f+K_r)}{V}s\right]y(s)+\left[\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s-2(K_f+K_r)\right]\theta(s)$$

$$=2K_f\delta(s) \tag{3.21$'$}$$

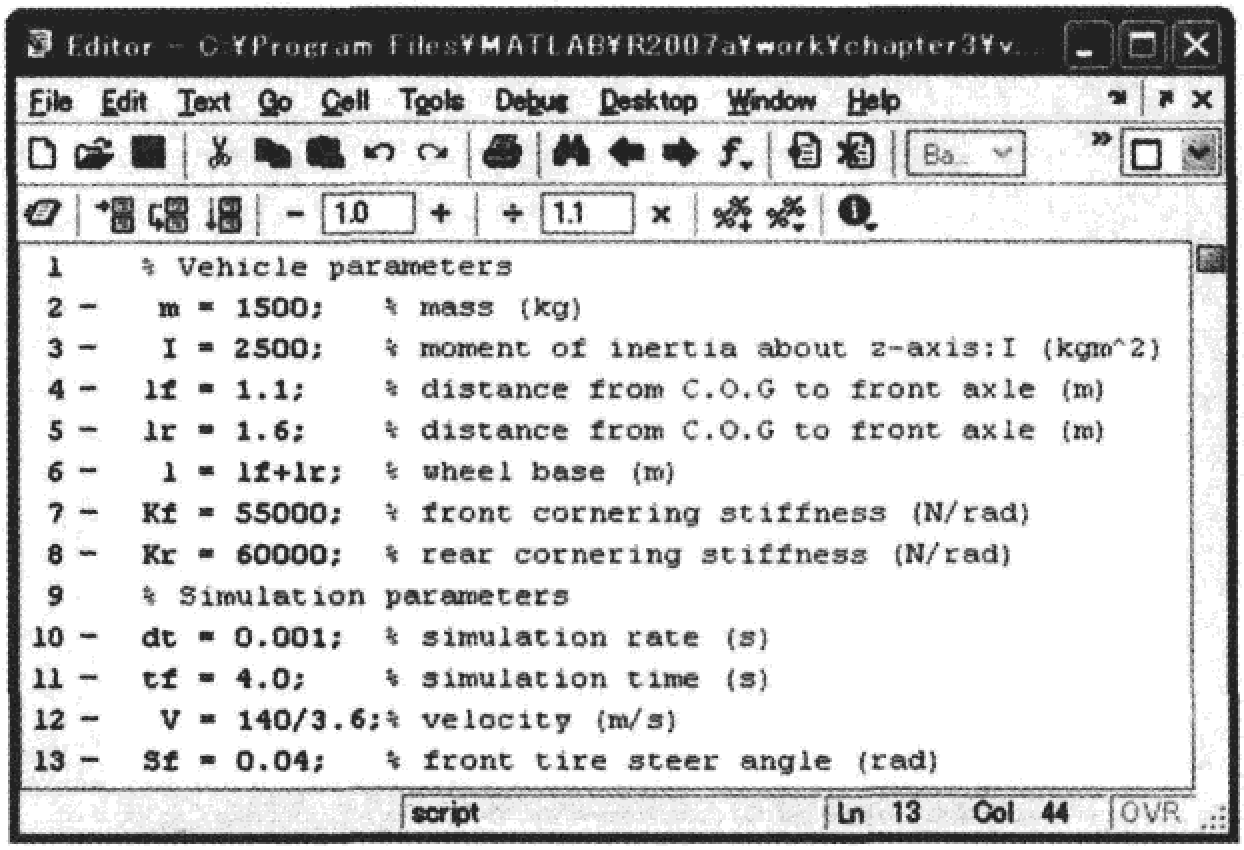
$$\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}sy(s)+\left[Is^2+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}s-2(l_fK_f-l_rK_r)\right]\theta(s)$$

$$=2l_fK_f\delta(s) \tag{3.22$'$}$$

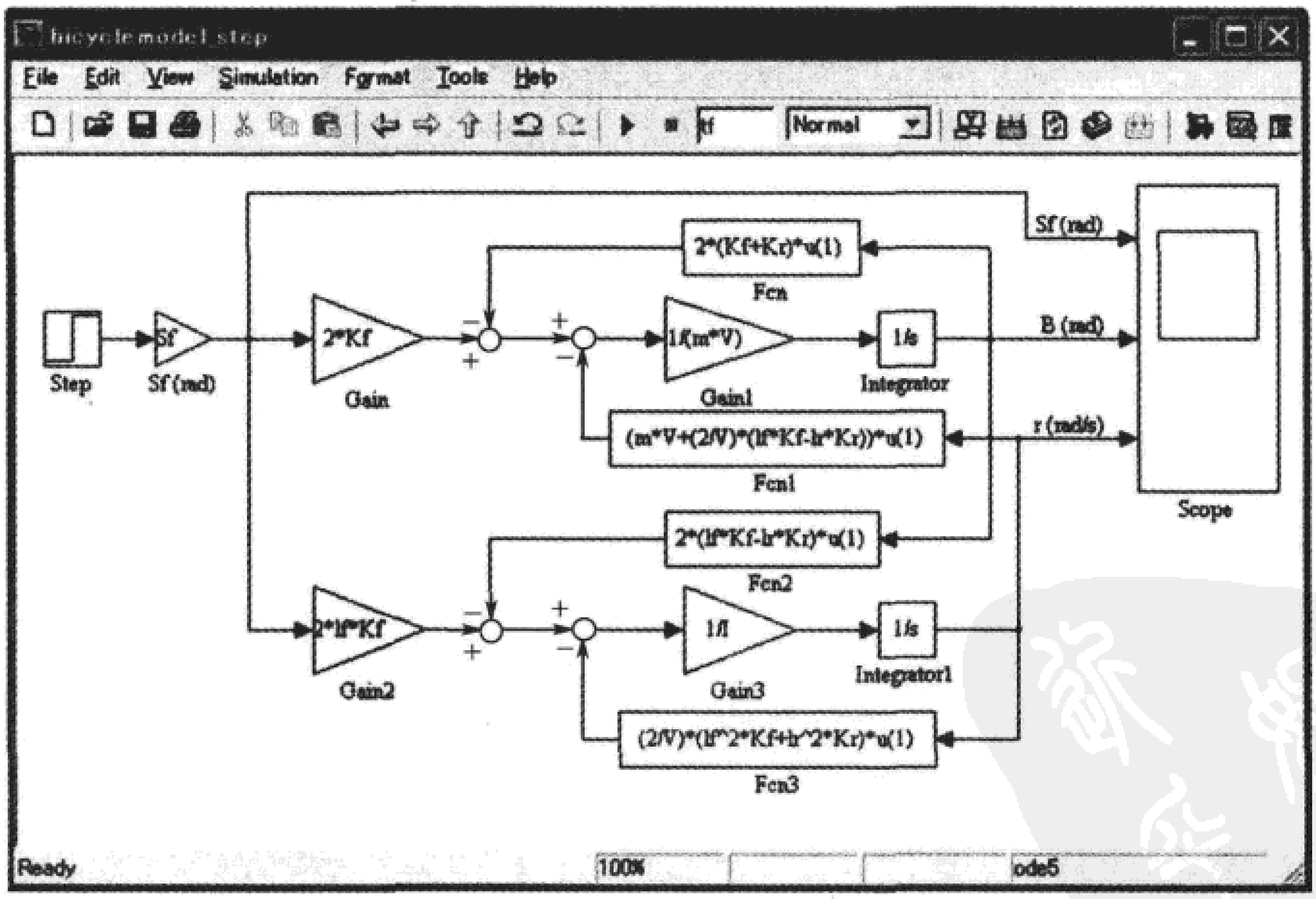
式中 $y(s)$ 和 $\theta(s)$ 分别表示对 y 和 θ 的拉普拉斯变换。

分别求解关于 $y(s)$ 和 $\theta(s)$ 的代数方程，得：

$$\frac{y(s)}{\delta(s)}=\frac{\begin{vmatrix}2K_f & \frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s-2(K_f+K_r)\\ l_fK_f & Is^2+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}s-2(l_fK_f-l_rK_r)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}ms^2+\frac{2(K_f+K_r)}{V}s & \frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s-2(K_f+K_r)\\ \frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s & Is^2+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}s-2(l_fK_f-l_rK_r)\end{vmatrix}} \tag{3.87}$$



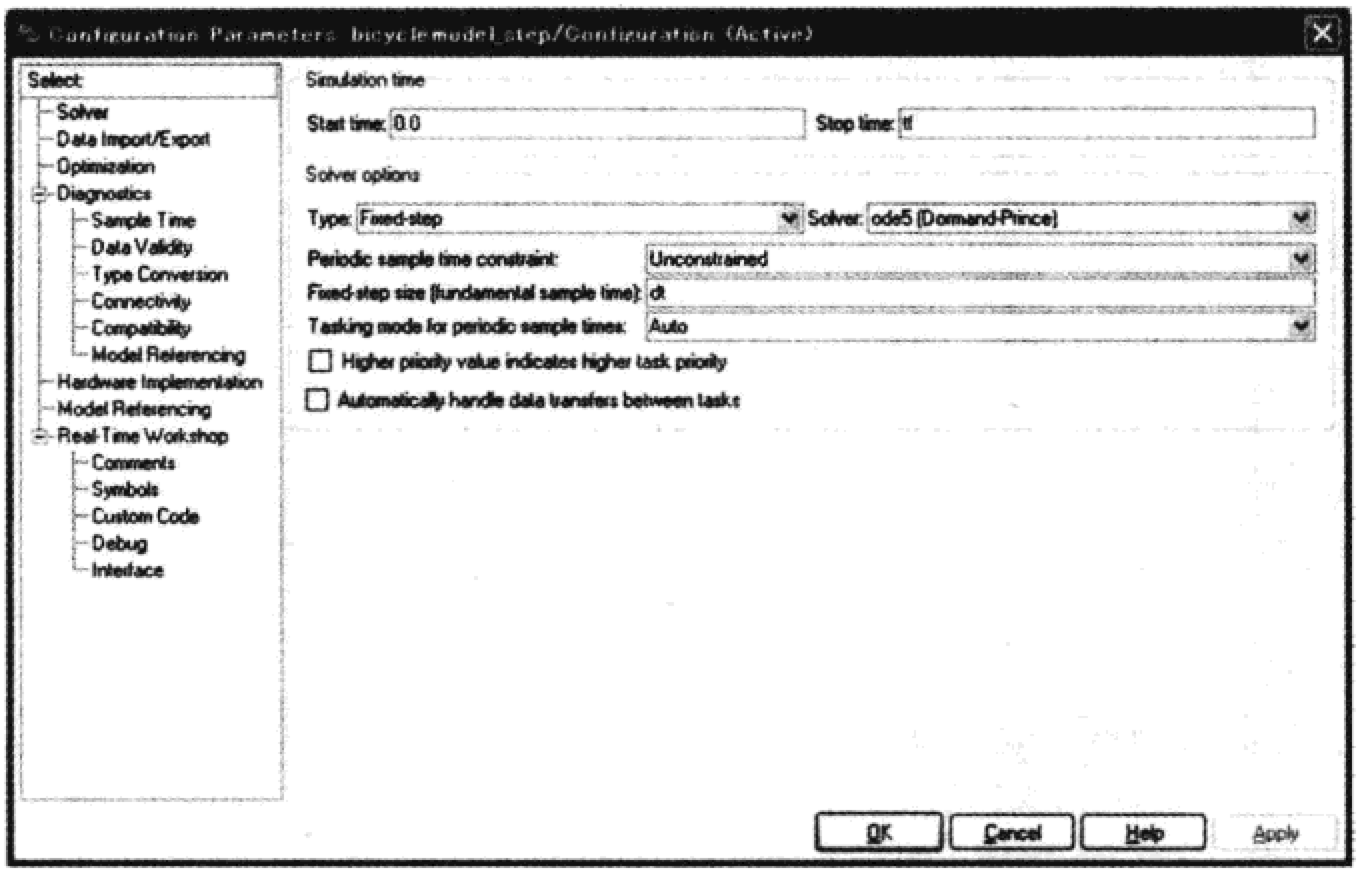
a)



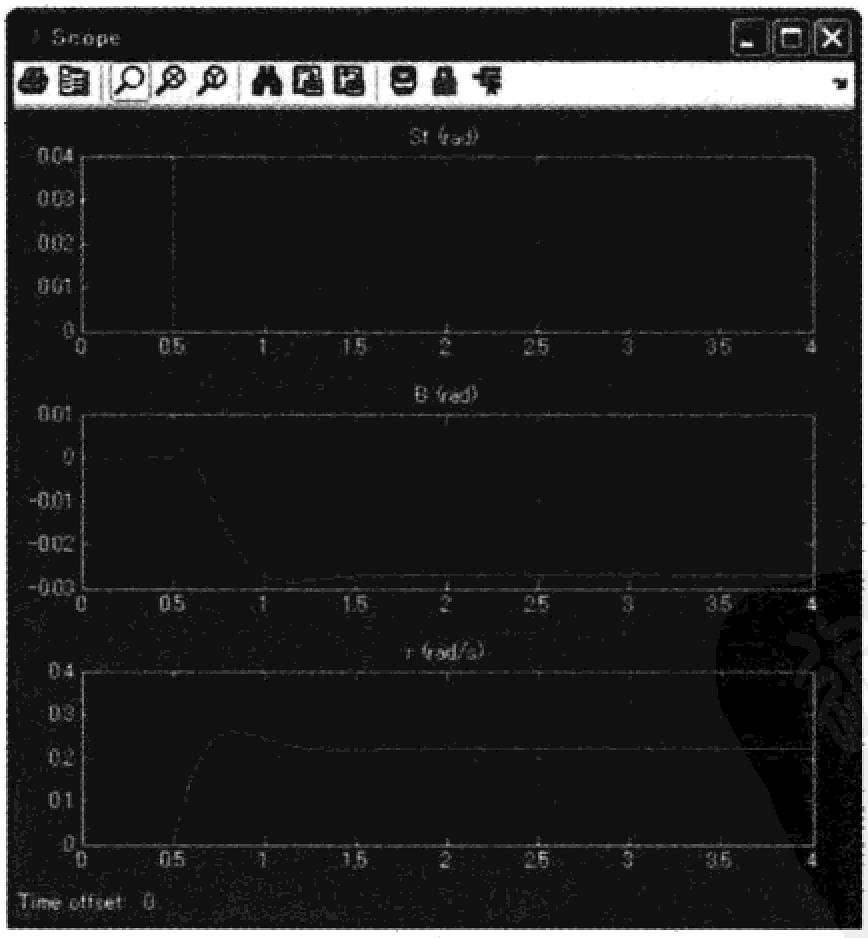
b)

例题 3.6 图　对车辆在阶跃转向输入下的响应进行仿真

a）仿真中车辆参数的设置　b）仿真程序框



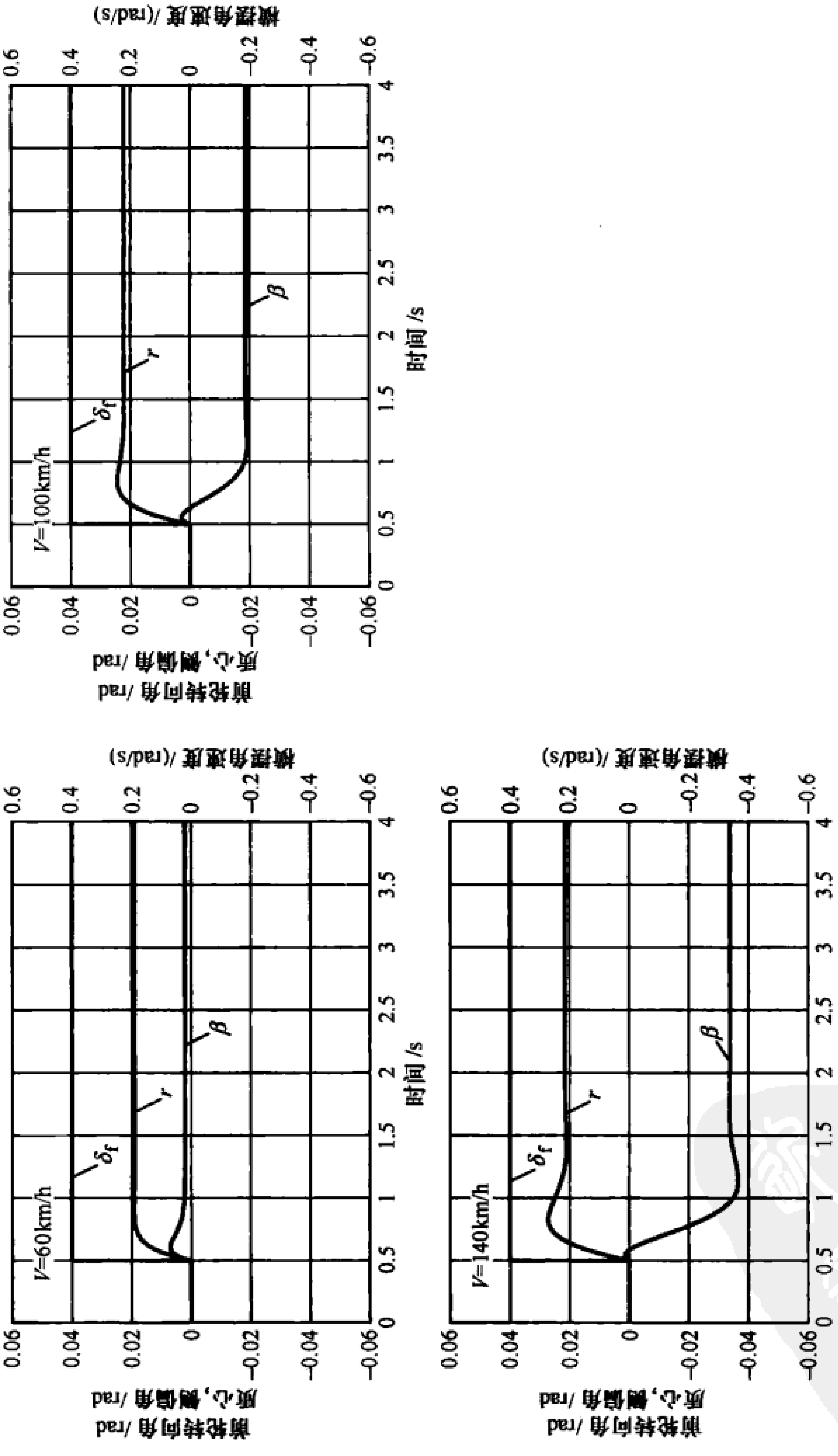
c）



d）

例题 3.6 图　对车辆在阶跃转向输入下的响应进行仿真(续)

c）其中的一个仿真条件　d）其中的一个仿真结果



e)

例题 3.6 图　对车辆在阶跃转向输入下的响应进行仿真（续）

e）全部的仿真结果

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)}=\frac{\begin{vmatrix} ms^2+\dfrac{2(K_f+K_r)}{V}s & 2K_f \\ \dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s & 2l_fK_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ms^2+\dfrac{2(K_f+K_r)}{V}s & \dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s-2(K_f+K_r) \\ \dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}s & Is^2+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}s-2(l_fK_f-l_rK_r) \end{vmatrix}} \tag{3.88}$$

然后，以前面导出的 ω_n 和 ζ 来表达，从而改写上面两式，得：

$$\frac{y(s)}{\delta(s)}=G_\delta^{\ddot{y}}(0)\frac{1+T_{y1}s+T_{y2}s^2}{s^2\left(1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{3.87′}$$

其中，

$$G_\delta^{\ddot{y}}(0)=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V^2}{l}=VG_\delta^r(0) \tag{3.89}$$

$$T_{y1}=\frac{l_r}{V} \tag{3.90}$$

$$T_{y2}=\frac{1}{2lK_r} \tag{3.91}$$

式中，$G_\delta^{\ddot{y}}(0)$是侧向加速度增益常数，表示车辆稳态转向运动时，其侧向加速度对 δ 的响应。

又有

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)}=G_\delta^r(0)\frac{1+T_rs}{s\left(1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{3.88′}$$

上面的式(3.87)和式(3.88)或式(3.87′)和式(3.88′)分别为车辆的侧向位移和横摆角对前轮转向输入的传递函数。正如前面所述，对上面两式的 $y(s)$ 和 $\theta(s)$ 进行反拉氏变换，可以得出相应某一转向角输入下的侧向位移和横摆角响应。根据车辆对转向响应的拉普拉斯变换以及以传递函数形式对车辆运动的表达，可以方便地求出某给定转向输入下真正的响应。这种方法同样也适用于这样的场合，即将车辆看成控制系统的控制对象，然后研究车辆运动的控制及其可控

制性。

另外，传递函数的系数 ω_n、ζ、$G_\delta^r(0)$、$G_\delta^{\ddot{y}}(0)$、T_r、t_e 和 t_p 是决定车辆转向响应特性的参数，因而也被称为“响应参数”。

3.4.3 车辆对于周期性转向输入的响应

一般来讲，在研究机械系统的动态特性时，通常会研究系统对周期性输入的响应。对于振动系统而言，我们称之为受迫振动；而在自动控制系统中，我们称之频率响应。

这种方法普遍地用于对车辆动态特性的理解。在此，我们将研究车辆对周期性转向输入的响应。作为一个驾驶人，能够感知到在转向输入下车辆的侧向加速度和横摆角速度是重要的。

首先，对周期性转向输入 δ，可通过将式(3.87′)两端同乘以 s^2，并将 $s=j\cdot 2\pi f$ 代入，从而得到车辆质心处的侧向加速度响应如下：

$$G_\delta^{\ddot{y}}(j\cdot 2\pi f)=G_\delta^{\ddot{y}}(0)\frac{1-(2\pi f)^2T_{y2}+j\cdot 2\pi fT_{y1}}{1-\dfrac{(2\pi f)^2}{\omega_n^2}+\dfrac{j\cdot 2\pi f\cdot 2\zeta}{\omega_n}} \tag{3.92}$$

式中，f 为周期性转向输入的频率；$j=\sqrt{-1}$。

由上式可得相对于转向角的侧向加速度增益 $|G_\delta^{\ddot{y}}|$ 和相位角 $\angle G_\delta^{\ddot{y}}$，分别为

$$|G_\delta^{\ddot{y}}|=\sqrt{\frac{P_y^2+Q_y^2}{R_y^2+S_y^2}}G_\delta^{\ddot{y}}(0) \tag{3.93}$$

$$\angle G_\delta^{\ddot{y}}=\tan^{-1}\left(\frac{Q_y}{P_y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{S_y}{R_y}\right) \tag{3.94}$$

其中，

$$P_y=1-(2\pi f)^2T_{y2},\quad Q_y=2\pi fT_{y1}$$

$$R_y=1-\frac{(2\pi f)^2}{\omega_n^2},\quad S_y=\frac{2\pi f\cdot 2\zeta}{\omega_n}$$

然后，通过将 $s=j\cdot 2\pi f$ 代入式(3.78′)中，对周期性转向输入 δ 的车辆横摆角速度 r 的响应 $G_\delta^{\ddot{y}}(j\cdot 2\pi f)$ 可写为

$$G_\delta^r(j\cdot 2\pi f)=G_\delta^r(0)\frac{1+j\cdot 2\pi fT_r}{1-\dfrac{(2\pi f)^2}{\omega_n^2}+\dfrac{j\cdot 2\pi f\cdot 2\zeta}{\omega_n}} \tag{3.95}$$

根据上式，对转向输入的横摆角速度增益 $|G_\delta^r|$ 和相位角 $\angle G_\delta^r$ 分别为

$$|G_\delta^r| = \sqrt{\frac{P_r^2 + Q_r^2}{R_r^2 + S_r^2}}G_\delta^r(0) \tag{3.96}$$

$$\angle G_\delta^r = \tan^{-1}\left(\frac{Q_r}{P_r}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{S_r}{R_r}\right) \tag{3.97}$$

其中

$$P_r = 1,\ Q_r = 2\pi f T_r$$

$$R_r = 1 - \frac{(2\pi f)^2}{\omega_n^2}$$

$$S_r = \frac{2\pi f \cdot 2\zeta}{\omega_n}$$

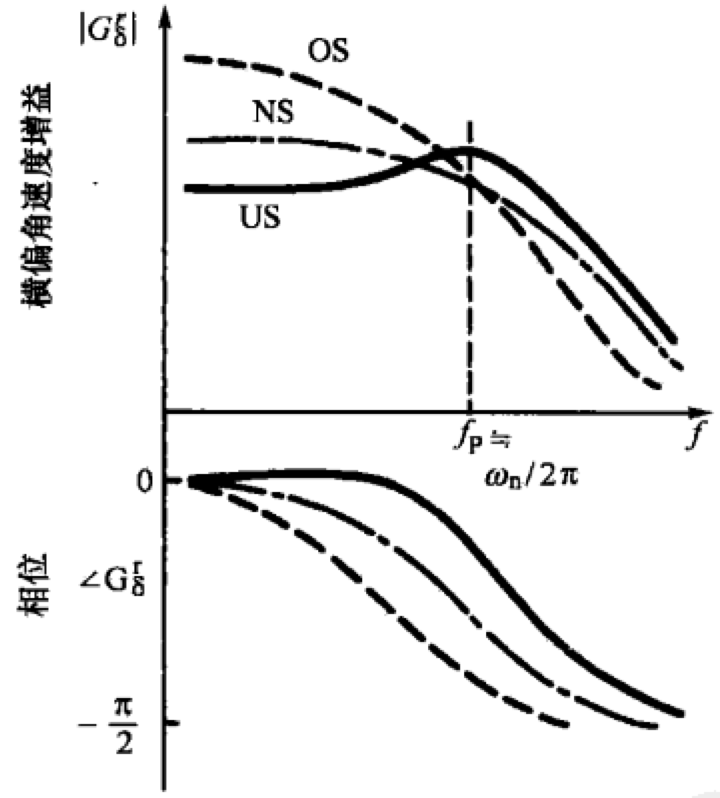


图 3.30　横摆角速度频率响应示意图

尤其是在研究车辆固有的动态特性时，考察其横摆角速度对周期性转向输入的响应是非常普遍的。图 3.30 定性地给出了由式(3.95)所表达的横摆角速度响应的一般形式。当转向输入的频率小时，横摆角速度对转向输入的增益几乎恒定。随着转向输入频率的增大，对于具有不足转向特性的车辆而言，其增益在某一频率处达到峰值，然后下降。而对具有过多转向和中性转向特性的车辆而言，其增益不存在峰

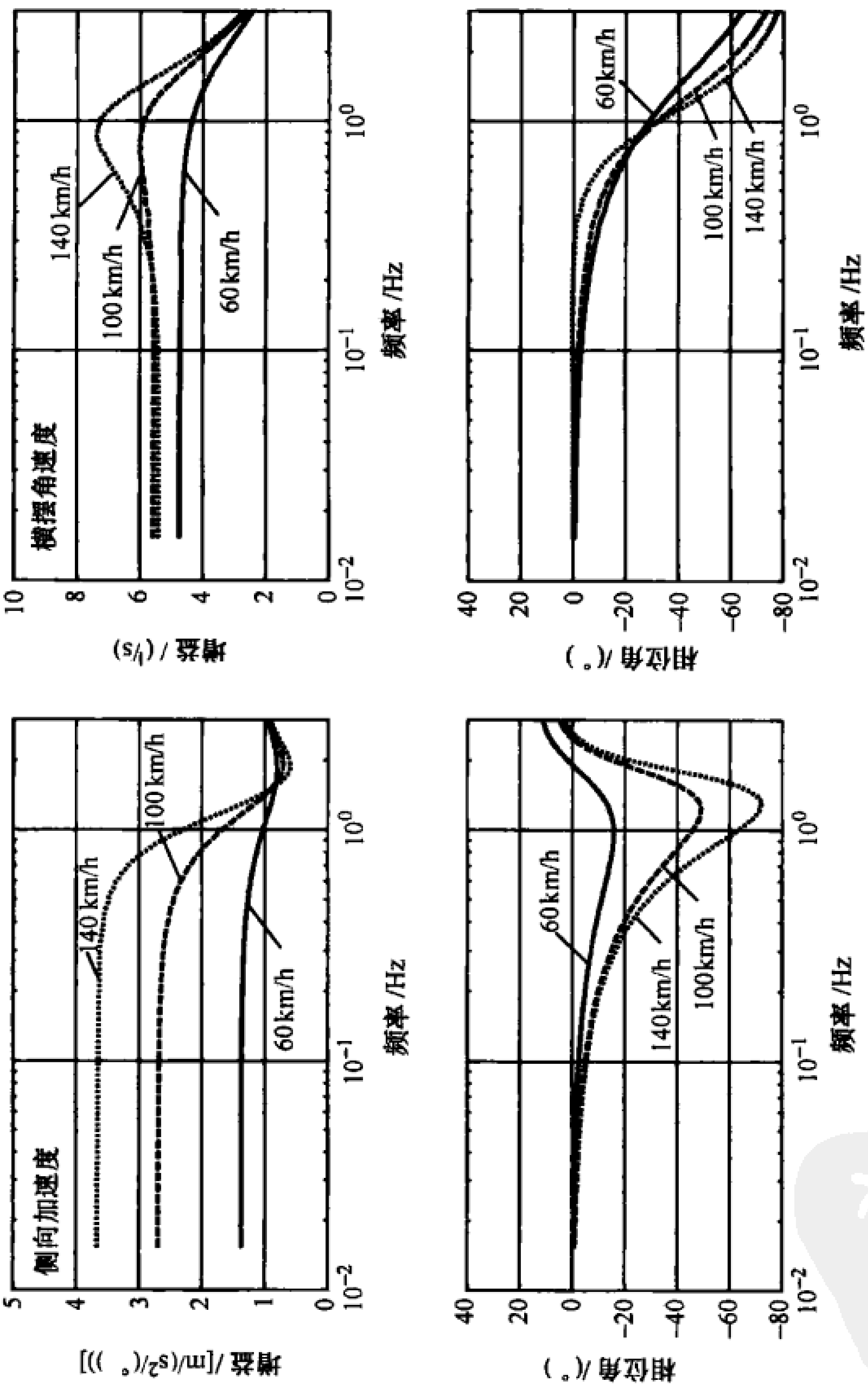


图 3.31　横摆角速度和侧向加速度的频率响应

值，而是随转向输入频率的增大而减小。对相频特性而言，在低频率时，相位滞后接近零；但随频率的增加，相位滞后会急剧增加，三种转向特性下均表现如此，只是这种趋势对具有过多转向特性的车辆更明显而已。对具有不足转向特性的车辆而言，其横摆角速度增益的峰值发生在车辆瞬态响应相对某一固定转向发生振荡的时刻。该峰值会随阻尼比 ζ 的减小而增大。当车辆呈不足转向特性时，行驶速度 V 越大，此峰值就会越大。出现此峰值的频率接近于车辆的固有频率 ω_n。

图 3.31 给出了一小型轿车对周期性转向输入的横摆角速度和侧向加速度响应的计算实例。由图可以清楚地看出，随着车辆行驶速度的提高，在高频段的相位滞后角就会变大，尤其是对侧向加速度而言。进一步看，由于车辆具有不足转向特性，横摆角速度响应增益的峰值出现在较高车速情况下，车辆的瞬态响应呈小阻尼的振荡。

这里，我们将考虑侧向加速度频率响应和横摆角速度频率响应的关系。根据地面固定坐标系下的运动方程式(3.21′)和式(3.22′)，本节推导了对转向输入的侧向加速度传递函数。还有一种方法，就是利用固定于车辆坐标系下的运动方程式(3.75)和式(3.76)来进行推导。据此，侧向加速度表达为 $V(\dot{\beta}+r)$，而侧偏速率则干涉于侧向加速度响应与横摆角速度响应之间。

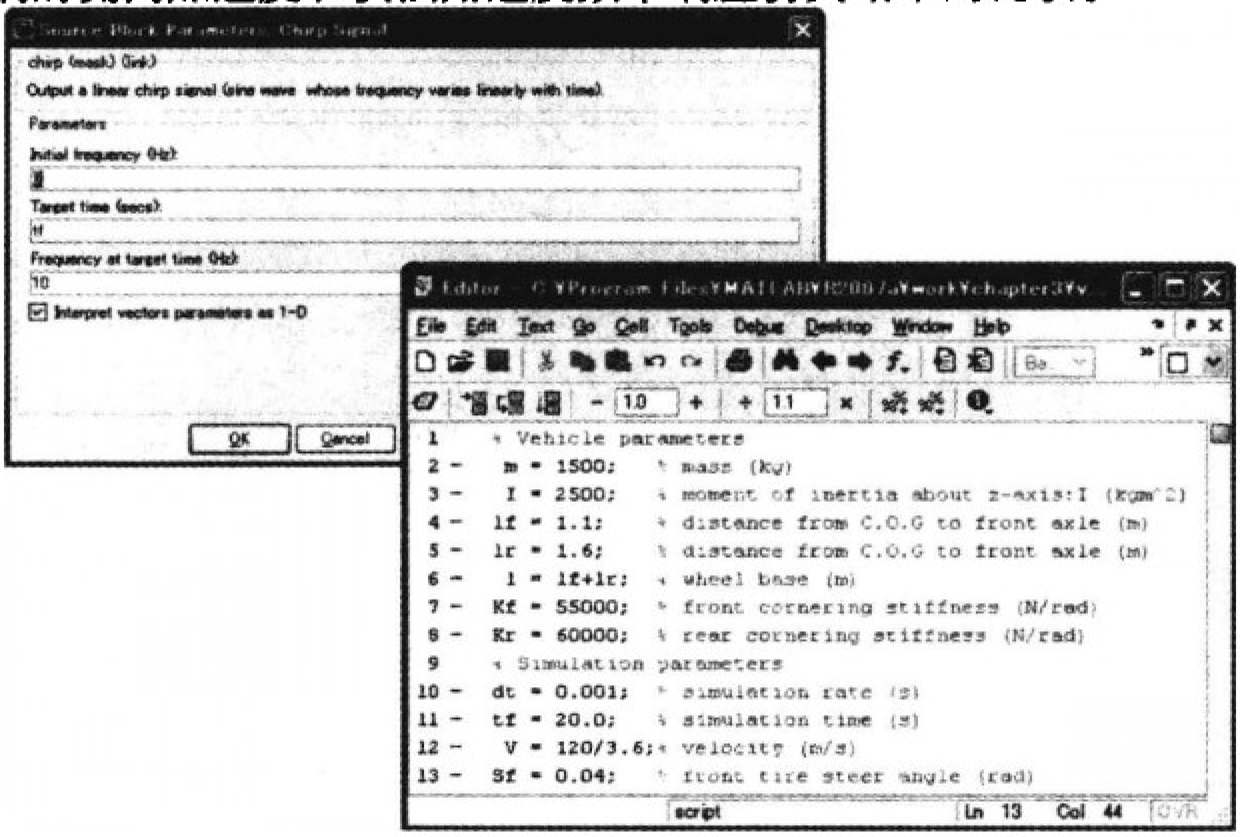
例题 3.7

试用 Matlab-Simulink 分别计算不足转向、中性转向和过多转向时，车辆横摆角速度的频率响应，其中车速为 $V=120\text{km/h}$，并证实车辆的转向特性对其横摆角速度频率响应的影响如前面的图 3.30 所示。

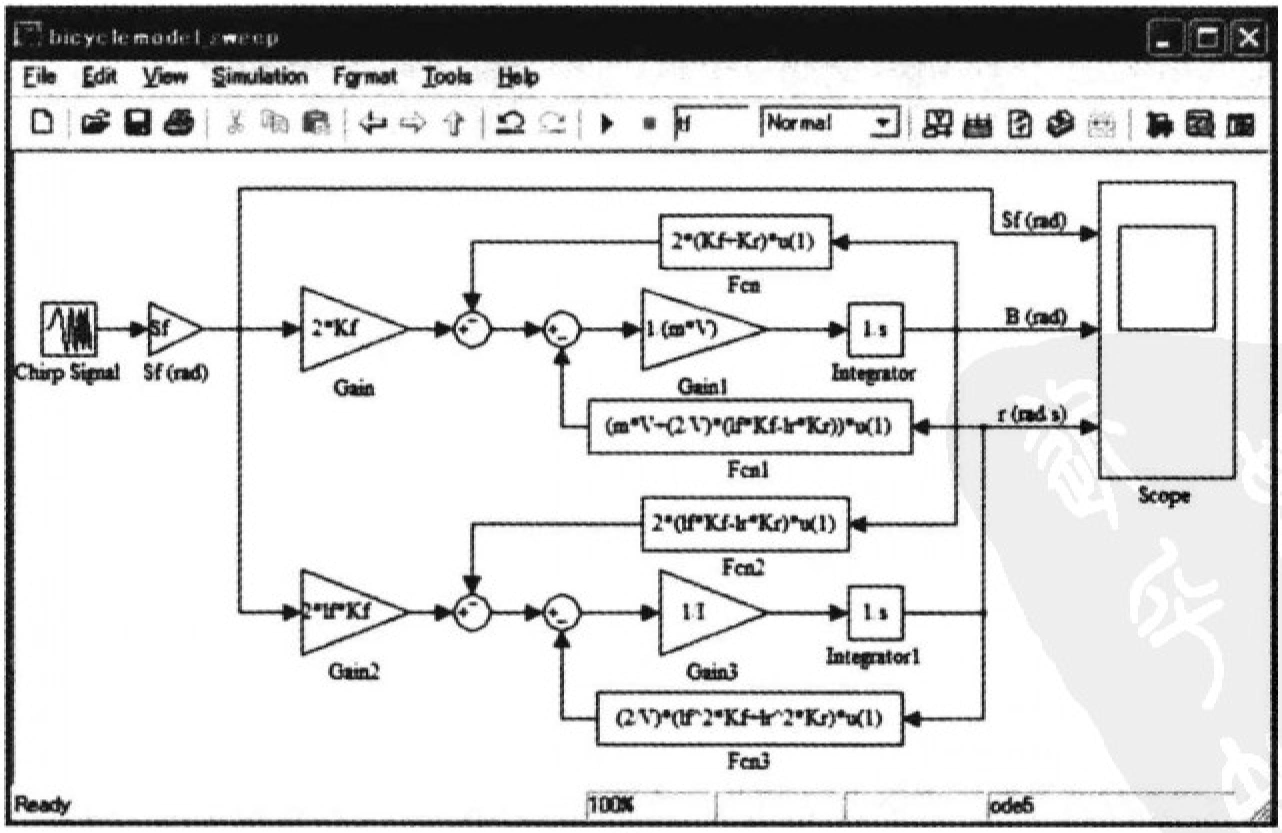
题解：

假设不足转向特性的车辆具有与例题 3.6 相同的参数；中性转向特性的车辆的轮胎侧偏刚度分别为 $K_f=68.16\text{kN/rad}$ 和 $K_r=46.85\text{kN/rad}$；过多转向特性的车辆的轮胎侧偏刚度分别为 $K_f=72.5\text{kN/rad}$ 和 $K_r=42.5\text{kN/rad}$。车辆参数及正弦波波形的设置如例题 3.7 图 a 所示。对该正弦转向输入的车辆响应仿真程序如例题 3.7 图 b 所示。例题 3.7 图 c 为一个仿真结果。对正弦输入的频率响应进行仿真，得到的仿真数据如例题 3.7 图 d 所示。经过傅里叶变换，横摆角速度对正弦输入

的频率响应被转化为时间历程，仿真结果如例题 3.7 图 e 所示。例题 3.7 图 f 所示为其中一个结果，例题 3.7 图 g 给出了不同转向特性的车辆的侧向加速度和横摆角速度频率响应仿真结果的比较。



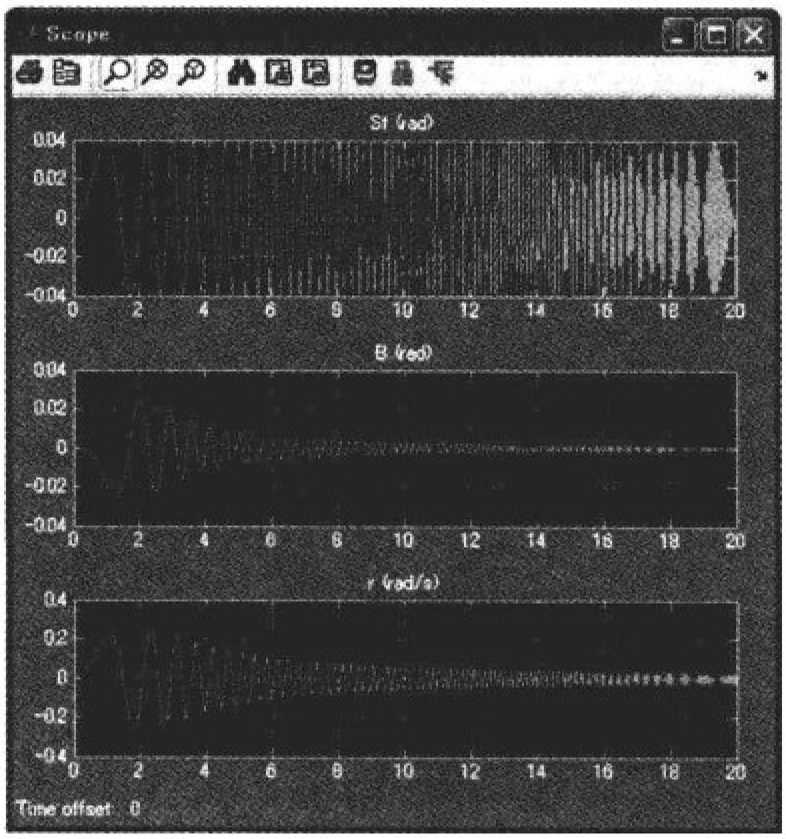
a)



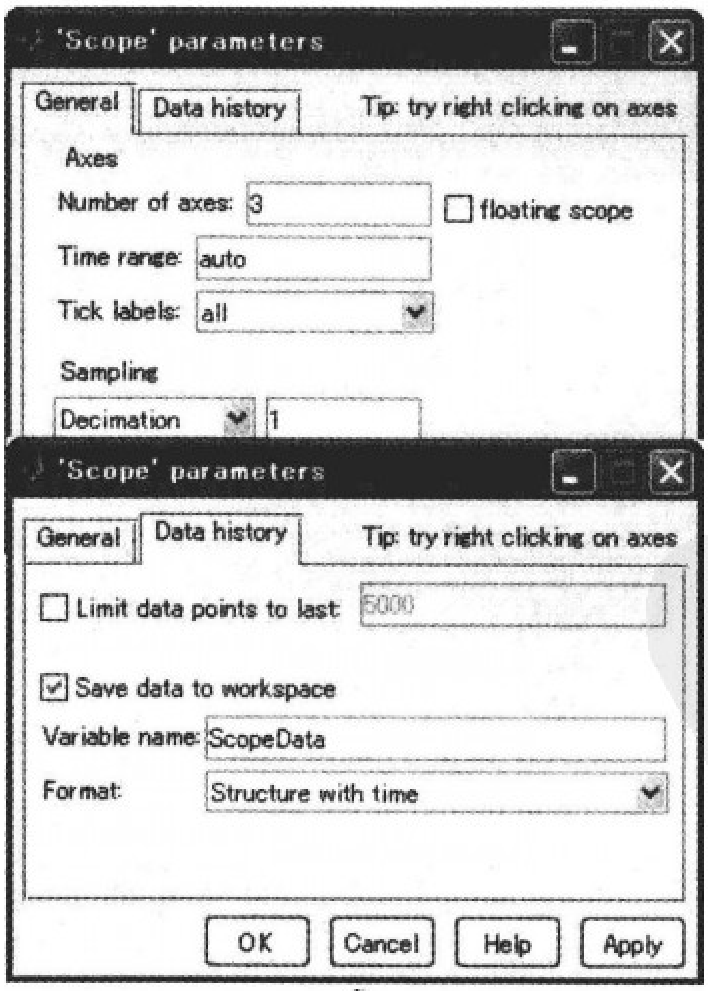
b)

例题 3.7 图　车辆横摆角速度的频率响应

a）车辆及正弦波波形的设置　b）车辆响应仿真程序框图



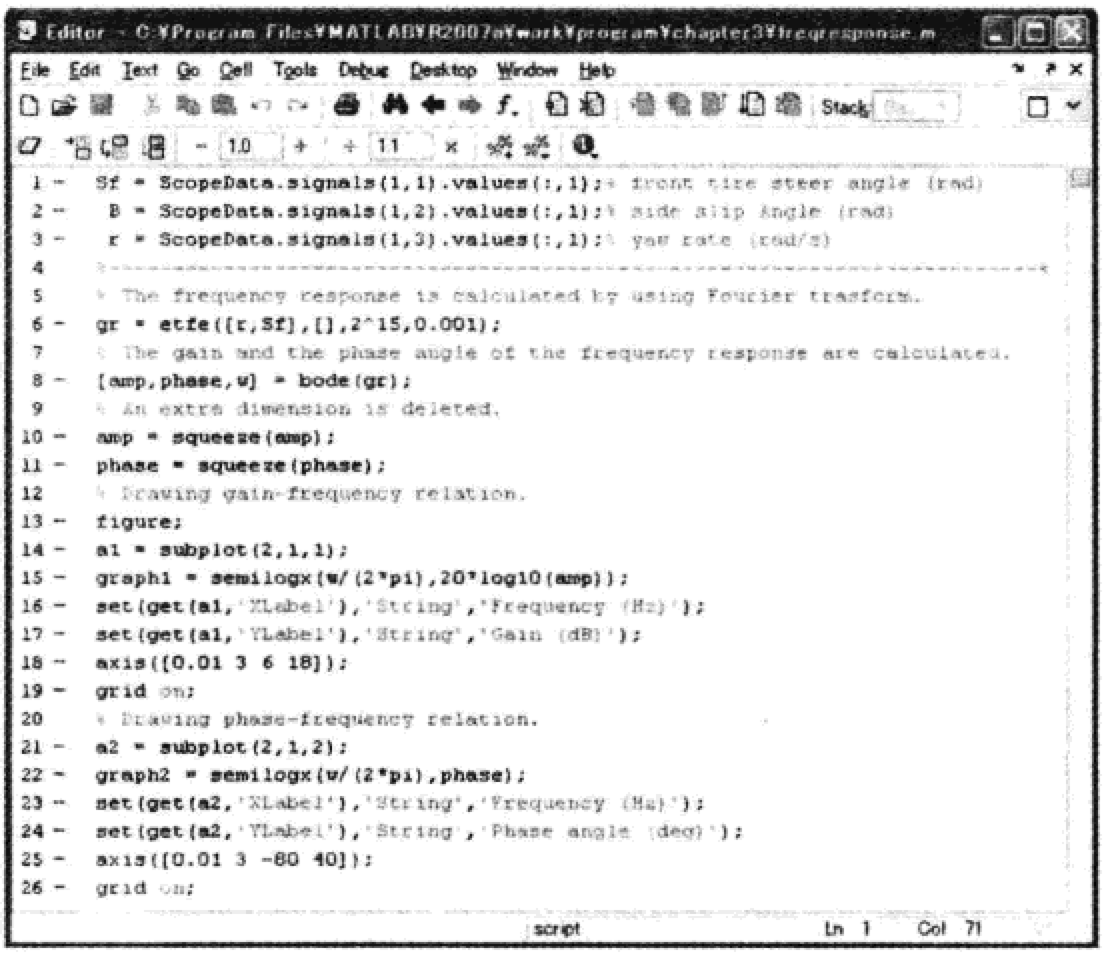
c)



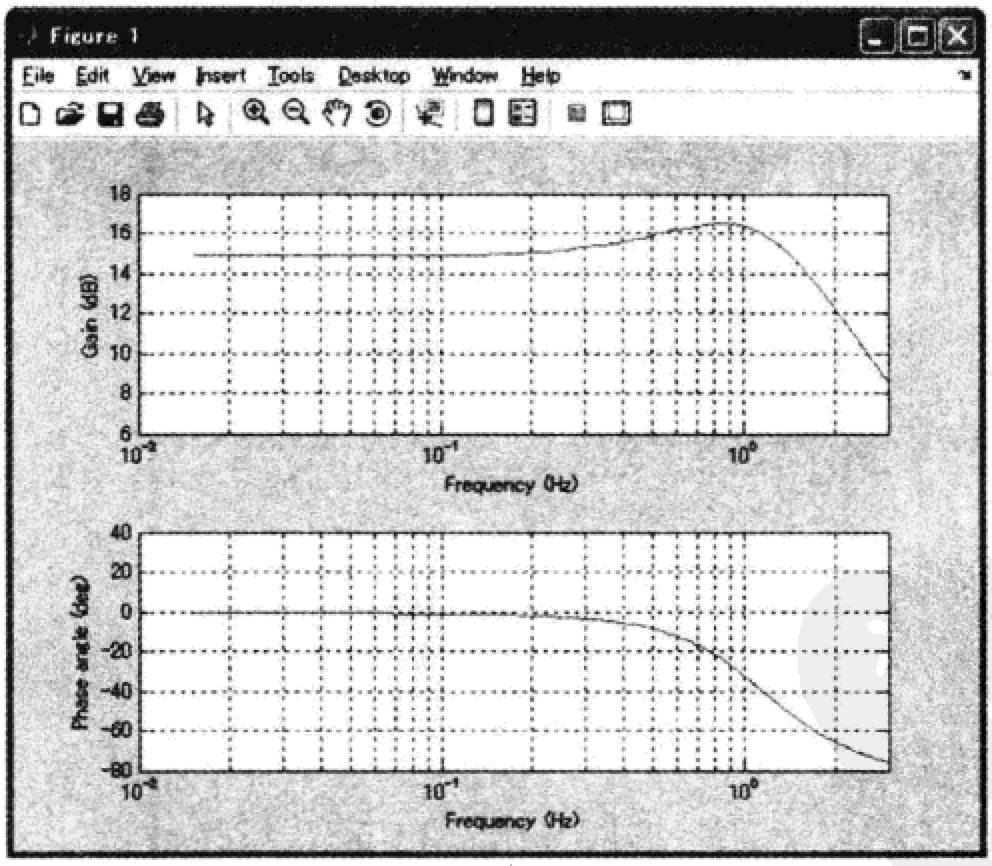
d)

例题 3.7 图　车辆横摆角速度的频率响应(续)

c）其中一个仿真结果　d）仿真数据



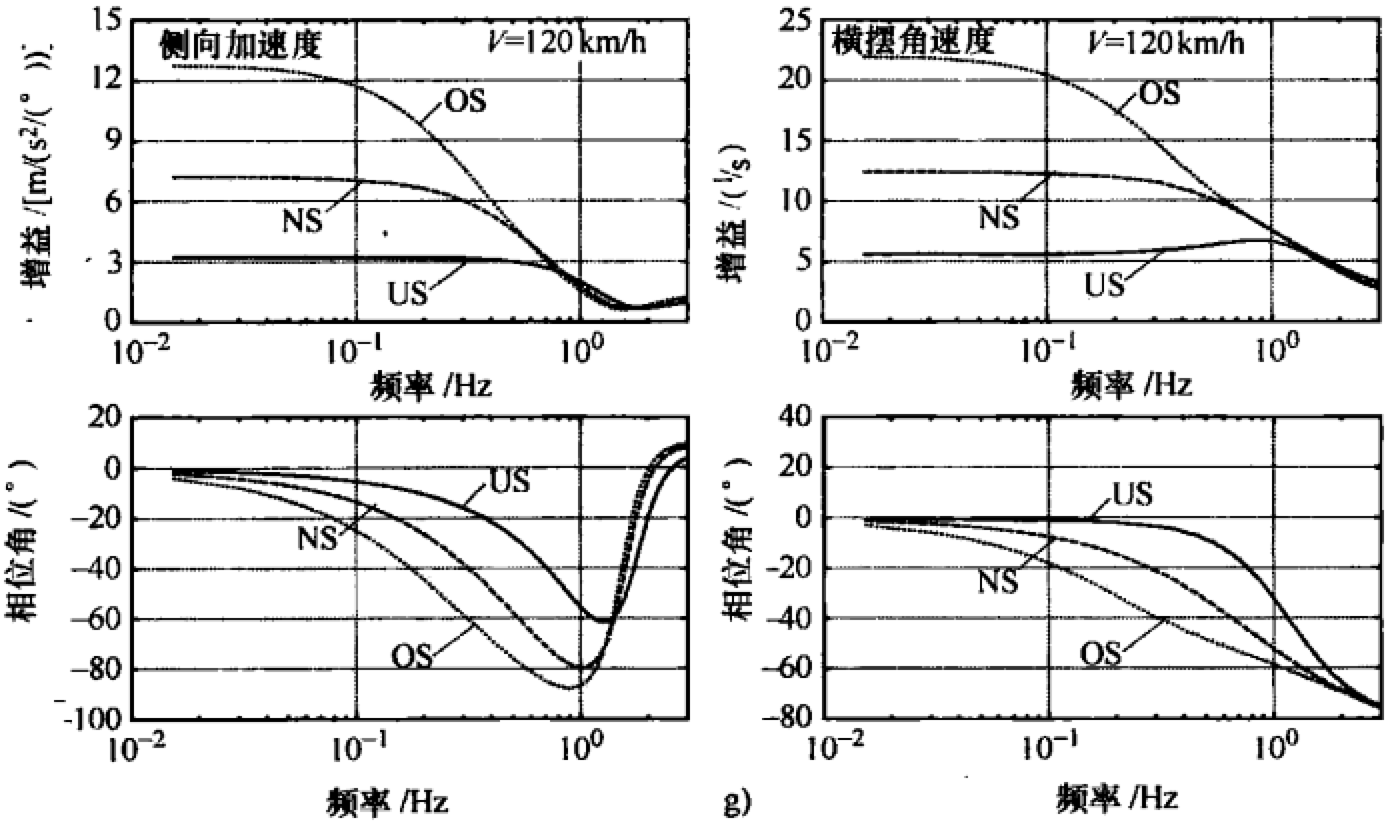
e)



f)

例题 3.7 图　车辆横摆角速度的频率响应(续)

e）傅里叶变换后的仿真结果　f）其中的一个仿真结果



例题 3.7 图　车辆横摆角速度的频率响应（续）

g）不同转向特性的仿真结果比较

因此，根据式(3.77′)和式(3.78′)，可以给出侧向加速度传递函数如下：

$$G_{\delta}^{\ddot{y}}(s)=V\frac{s\beta(s)}{\delta(s)}+V\frac{r(s)}{\delta(s)}=VG_{\delta}^{\beta}(0)\frac{s(1+T_{\beta}s)}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}+VG_{\delta}^{r}(0)\frac{1+T_r s}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V^2}{l}\frac{\dfrac{l_r}{V}s-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_f V}{K_r}s+\dfrac{I}{2lK_r}s^2}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}+\frac{1}{1+AV^2}\frac{V^2}{l}\frac{1+\dfrac{m\,l_f V}{2l\,K_r}s}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V^2}{l}\frac{1+\dfrac{l_r}{V}s+\dfrac{I}{2lK_r}s^2}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}=G_{\delta}^{\ddot{y}}(0)\frac{1+T_{y1}s+T_{y2}s^2}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$$

观察该传递函数分子中系数为 $ml_fV/(2lK_f)$ 的 s 项，由于相应的横摆角速度与质心侧偏角的分子部分正好符号相反，所以互相抵消。因而只剩下 l_r/V 这项作为 s 的系数保留在侧向加速度传递函数的分子中，并随着车速的增加急剧变小。

一般情况下，传递函数分子中 s 的系数会对分母中 s 和 s^2 的系数造成的响应延迟产生重要影响，并起到补偿的作用。对转向输入而言，尤其是在高车速情况下，与横摆角速度响应函数分子中 s 的系数相比，侧向加速度响应函数的分子中 s 的系数较小。这就是为什么与横摆角速度相比，尤其在高速时，侧向加速度在相位上有大得多的延迟的部分原因，如图 3.31 所示。侧向加速度大的延迟归咎于高速行驶时车辆会有一个反作用于转向角的侧偏响应。这是车辆动力学基本特性的一个非常重要的部分，要归因于侧向加速度与横摆角速度之间车辆侧偏运动的干预。

3.4.4 非线性轮胎特性的影响

前面，在轮胎侧偏力与其侧偏角成正比的假设下，我们研究了车辆的动态特性。现在研究的重点是，当侧向力与侧偏角不成比例时（比如在大的轮胎侧偏角时），车辆动力学特性是如何被影响的。

我们已在第 2.3.1 和 2.4.2 小节中讨论了关于轮胎的侧偏力 F 和侧偏角 β 之间紧密的关系。为了简单起见，设在 $\beta=0$ 时侧偏刚度为 K，一个作为侧偏力达到饱和时的摩擦力 μW 可用 β 的二次多项式近似表示如下：

$$F = K\beta - \frac{K^2}{4\mu W}\beta^2 \tag{3.98}$$

其关系如图 3.32 所示。

当一个重量为 W 的车辆以侧向加速度 $\ddot{y}$、如式(3.48)表达的那样作圆周运动时，作用于其前、后轮的侧向力为

$$2Y_f(\beta_f) = \frac{l_r W}{l}\ddot{y} = 2K_f\beta_f - \frac{K_f^2}{\mu\frac{l_r W}{l}}\beta_f^2 \tag{3.99}$$

$$2Y_r(\beta_r) = \frac{l_f W}{l}\ddot{y} = 2K_r\beta_r - \frac{K_r^2}{\mu\frac{l_f W}{l}}\beta_r^2 \tag{3.100}$$

式中，β_f 和 β_r 分别为前、后轮胎的侧偏角。

根据以上方程，等效的侧偏刚度 $\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}$ 和 $\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}$ 可写为

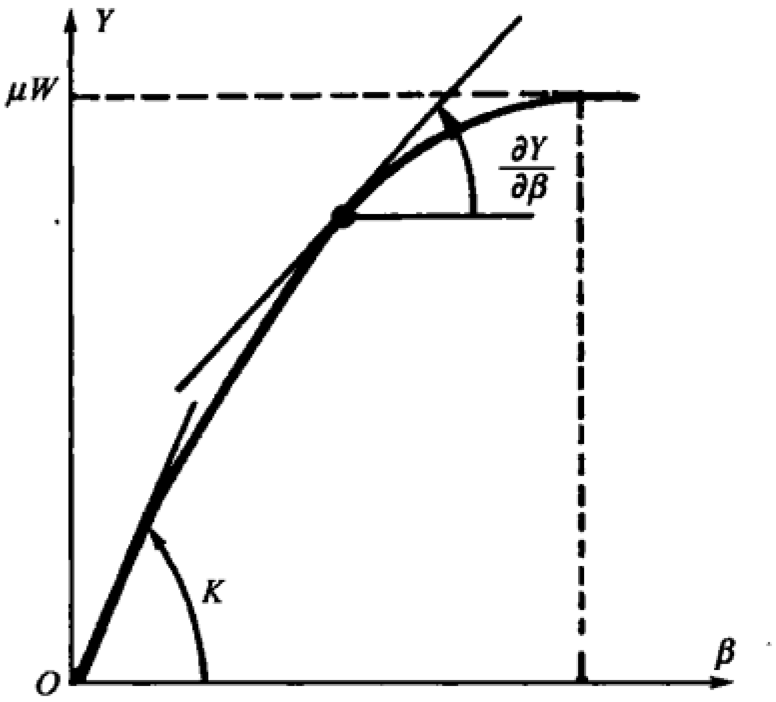


图 3.32　轮胎非线性特性的近似关系

$$\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}=K_f\left(1-\frac{K_f}{\mu\frac{l_r W}{l}}\beta_f\right)=K_f\sqrt{1-\frac{\ddot{y}}{\mu}} \tag{3.101}$$

$$\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}=K_r\left(1-\frac{K_r}{\mu\frac{l_f W}{l}}\beta_r\right)=K_r\sqrt{1-\frac{\ddot{y}}{\mu}} \tag{3.102}$$

以上是具有侧向加速度 $\ddot{y}$ 的圆周运动在平衡点处，侧向力对侧偏角的梯度。若 $\ddot{y}/\mu \ll 1$，则有

$$\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}=K_f\left(1-\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right) \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}=K_r\left(1-\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right) \tag{3.104}$$

在圆周运动中，车辆的侧偏刚度随侧向加速度的增大而减小。当侧向加速度接近极限或接近路面与轮胎之间的摩擦系数时，侧偏刚度会随着侧向加速度的增大而急剧减小。在 $\ddot{y}$ 小于 μ 的范围内，侧偏刚度可认为是线性减少的，如图 3.33 所示。

接下来观察轮胎呈非线性特性时车辆的运动特性。我们看一下在车辆作圆周运动且侧向加速度为 $\ddot{y}$ 时，由初始状态对给定的一个小转向输入，该时刻车辆所对应的小幅运动，其运动方程式表示如下：

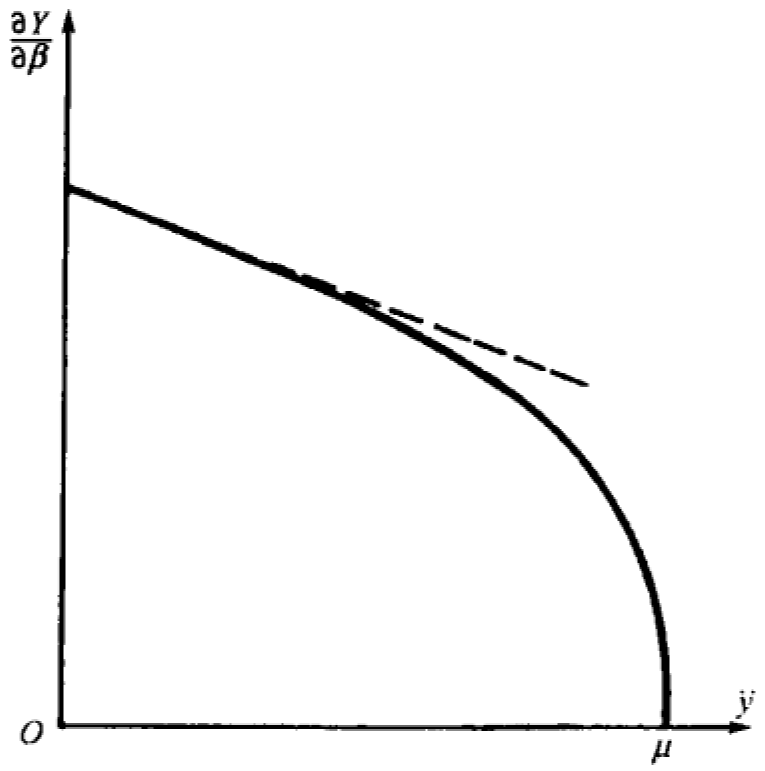


图 3.33　近似的轮胎非线性特性

$$m\left[g\ddot{y}+V\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)\right]=2Y_{\mathrm{f}}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}r}{V}\right)+2Y_{\mathrm{r}}\left(\beta_{\mathrm{r}}-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}r}{V}\right) \tag{3.105}$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2l_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}r}{V}\right)-2l_{\mathrm{r}}Y_{\mathrm{r}}\left(\beta_{\mathrm{r}}-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}r}{V}\right) \tag{3.106}$$

由于δ、β和r均非常小，故有

$$Y_{\mathrm{f}}\left(\beta_{\mathrm{f}}+\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}r}{V}\right)\approx Y_{\mathrm{f}}(\beta_{\mathrm{f}})+\frac{\partial Y_{\mathrm{f}}}{\partial\beta_{\mathrm{f}}}\left(\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}r}{V}\right)$$

$$Y_{\mathrm{r}}\left(\beta_{\mathrm{r}}-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}r}{V}\right)\approx Y_{\mathrm{r}}(\beta_{\mathrm{r}})+\frac{\partial Y_{\mathrm{r}}}{\partial\beta_{\mathrm{r}}}\left(-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}r}{V}\right)$$

因为车辆处于平衡状态，有

$$m\ddot{g}y=2Y_{\mathrm{f}}(\beta_{\mathrm{f}})+2Y_{\mathrm{r}}(\beta_{\mathrm{r}})$$

$$2l_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}(\beta_{\mathrm{f}})-2l_{\mathrm{r}}Y_{\mathrm{r}}(\beta_{\mathrm{r}})=0$$

将这些方程代入式(3.105)和式(3.106)，整理后可得最终的方程如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2\left(\frac{\partial Y_{\mathrm{f}}}{\partial\beta_{\mathrm{f}}}+\frac{\partial Y_{\mathrm{r}}}{\partial\beta_{\mathrm{r}}}\right)\beta+\left[mV+\frac{2\left(l_{\mathrm{f}}\frac{\partial Y_{\mathrm{f}}}{\partial\beta_{\mathrm{f}}}-l_{\mathrm{r}}\frac{\partial Y_{\mathrm{r}}}{\partial\beta_{\mathrm{r}}}\right)}{V}\right]r=2\frac{\partial Y_{\mathrm{f}}}{\partial\beta_{\mathrm{f}}}\delta \tag{3.107}$$

$$2\left(l_f\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}-l_r\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_r}\right)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2\left(l_f^2\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}+l_r^2\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}\right)}{V}r=2l_f\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}\delta \quad (3.108)$$

以上就是轮胎呈非线性特性时，基于微摄动理论线性化后的车辆运动方程。当轮胎进入非线性特性区域内，其侧偏刚度 K_f 和 K_r 可由式(3.101)和式(3.102)或式(3.103)和式(3.104)中的等效侧偏刚度$\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}$和$\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}$替代。

这里，当 $\ddot{y}/\mu \ll 1$ 时，等效侧偏刚度为

$$\frac{\partial Y_f}{\partial \beta_f}=K_f^*=K_f\left(1-\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right)$$

$$\frac{\partial Y_r}{\partial \beta_r}=K_r^*=K_r\left(1-\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right)$$

通过下式，可求得表达车辆动力学特性的几个参数。首先，稳定性因子为

$$A^*=\frac{m}{2l^2}\frac{l_rK_r^*-l_fK_f^*}{K_f^*K_r^*}=\frac{m}{2l^2}\frac{l_rK_r-l_fK_f}{K_fK_r}\left(1+\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right)=A\left(1+\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right) \quad (3.109)$$

现在，固有频率变为

$$\begin{aligned}\omega_n^*&=\frac{2\sqrt{K_f^*K_r^*}\,l}{mk}\frac{\sqrt{1+A^*V^2}}{V}\\&=\frac{2\sqrt{K_fK_r}\,l}{mk}\frac{\sqrt{1+AV^2}}{V}\left[1-\left(1+\frac{1}{1+AV^2}\right)\frac{\ddot{y}}{4\mu}\right]\\&=\omega_n\left[1-\left(1+\frac{1}{1+AV^2}\right)\frac{\ddot{y}}{4\mu}\right]\end{aligned} \quad (3.110)$$

由式(3.85)给出的横摆角速度的响应时间近似为

$$t_e^*=\frac{1}{\omega_n^{*2}T_r}=\frac{1}{\omega_n^2T_r}\left(1+\frac{1}{1+AV^2}\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right)=t_e\left(1+\frac{1}{1+AV^2}\frac{\ddot{y}}{2\mu}\right) \quad (3.111)$$

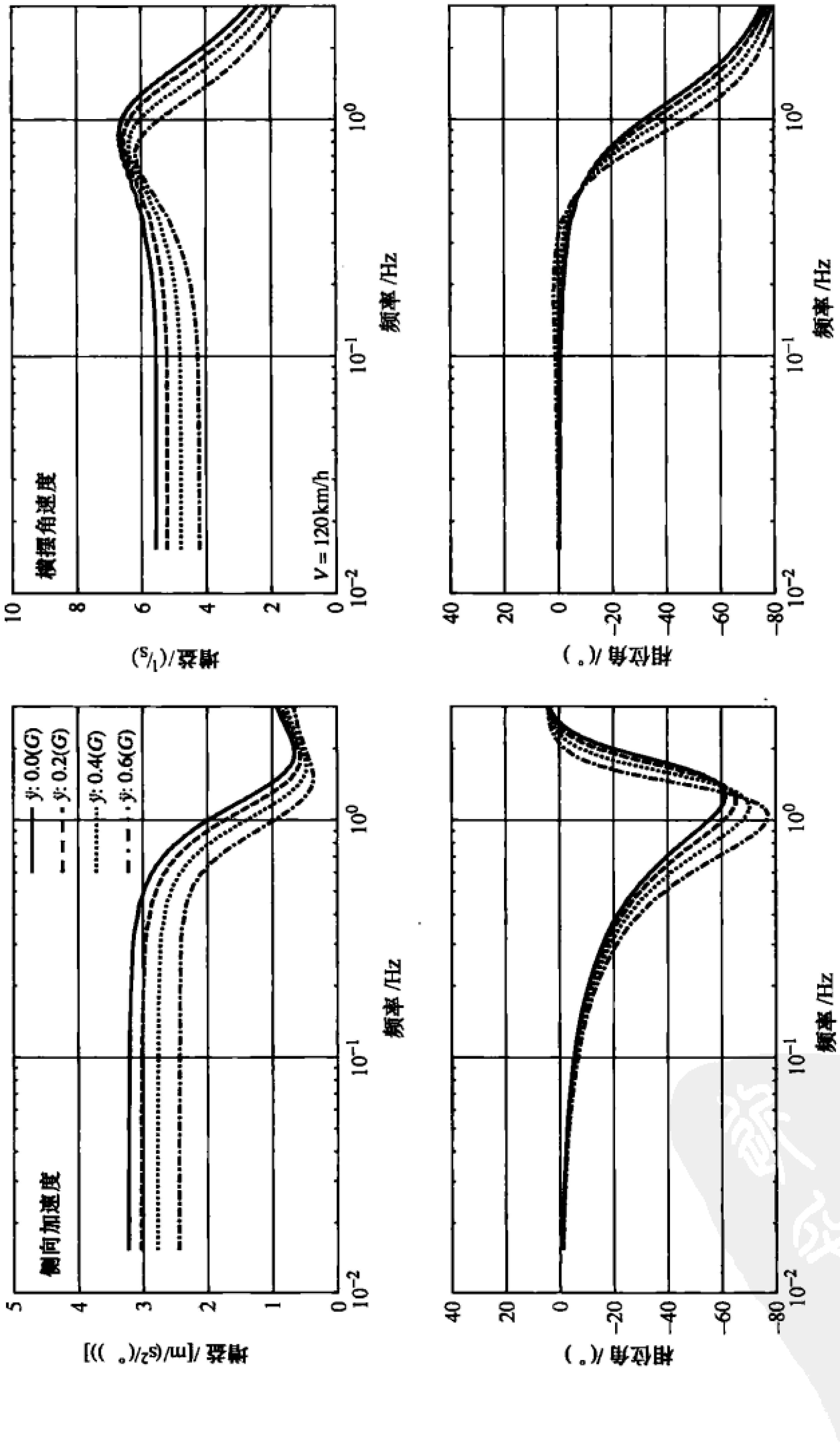


图 3.34　轮胎非线性特性对频率响应的影响

以上表明了轮胎呈非线性特性时，车辆动态特性相对于侧向加速度 $\ddot{y}$ 的变化情况。

一个车辆横摆角速度和侧向加速度频率响应的例子如图 3.34 所示。它给出了车辆作圆周运动时，不同侧向加速度值的情况下车辆的动态特性，也看出了轮胎非线性特性的影响。由于轮胎对侧偏角呈非线性的饱和特性，车辆的动态特性随着侧向加速度的变化发生实质性的改变。

习题

3.1　由图 3.4b，当车辆行驶速度大于 40km/h、横摆角速度小于 0.1rad/s、车辆的轨迹宽度为 1.4m 时，试证明：左、右两轮的轮胎侧偏角可认为几乎相等，车辆模型简化成自行车模型是合理的。

3.2　由式(3.26)、式(3.27)和式(3.28)试推导式(3.29)和式(3.30)。

3.3　几何画图说明：在低速稳态转向运动中车辆侧偏角可由式(3.33)中的第三个方程来描述。

3.4　试给出式(3.34)的几何证明。

3.5　采用式(3.39)，试求车辆的稳态横摆角速度达到其峰值时的车速。

3.6　采用式(3.40)，试求车辆稳态侧偏角为零时的车速，求解中可能用到的车辆参数：$m = 1500\text{kg}$，$l_f = 1.1\text{m}$，$l_r = 1.6\text{m}$，$K_r = 60\text{kN/rad}$。

3.7　已知车辆参数：$m = 1500\text{kg}$，$l_f = 1.1\text{m}$，$l_r = 1.6\text{m}$，$K_f = 60\text{kN/rad}$，$K_r = 60\text{kN/rad}$，试根据式(3.43)计算车辆的稳定性因子。

3.8　试根据式(3.45)求车辆的静态裕度，计算中车辆参数与 3.7 题相同。

3.9　已知车辆参数如题 3.7，试求具有过多转向特性的车辆的临界车速。

3.10　试证明：当车辆的静态裕度接近零时，车辆固有频率的倒数 $1/\omega_n$ 与式(3.74)所表达的响应时间近似相等。

3.11 试根据式(3.110)估计：在干燥路面$\mu=1.0$、由圆周转向引起的侧向加速度为2.0m/s^2 时，车辆固有频率减少的百分比为多少。

3.12 采用 Matlab/Simulink 软件以及如题3.6 给出的车辆参数，对一个幅值为0.04rad、频率为0.5Hz 的单一正弦转向输入，试仿真车辆分别在车速为60km/h、100km/h 和140km/h 时的响应。

3.13 试根据式(3.24)，试求转向角为零时由扰动横摆角速度$\Delta\gamma_C$ 引起的车辆稳态侧偏角。

3.14 假设转向角为零，试根据式(3.25)求由回复横摆力矩所产生的稳态横摆角速度$\Delta\gamma_R$，而该回复横摆力矩由习题3.3 计算得出的侧偏角产生。

3.15 由习题3.14 可求出比值$\Delta r_R/\Delta r_C$。当该比值大于1 时，意味着结果大于激励值，且下一刻产生的结果将更大于该结果，以此类推，车辆最终趋于失稳。试求满足$\Delta r_R/\Delta r_C=1$ 时的车速，并证明它与式(3.42)求得的临界车速相同。

参考文献

[1] D. W. Whitcomb etal., Design implication of a general theory of automotive stability and control, Proceedings of IMechE(AD), 1956.

[2] J. R. Ellis, VEHICLE DYNAMICS, LONDON BUSINESS BOOK LTD., London, 1969.

第 4 章　外部干扰引起的车辆运动

4.1　引言

在前面章节中，我们研究了车辆运动的基本特点，尤其是在操纵输入下车辆的运动特性。车辆在沿运动轨迹无任何约束的情况下可在平面内自由运动，并可在侧向力的作用下沿侧向运动。换言之，由于车辆能够在平面内自由运动，因此也就不可避免地会受外部干扰而产生不希望的运动。

本章中，我们将研究在外部侧向力作用下车辆的运动，以进一步分析车辆运动的特点。在此，我们假定车辆的前轮转角为零，且无任何可引起车辆运动响应的操纵控制。

4.2　质心侧向力所引起的车辆运动

当车辆行驶在侧向倾斜的路面上时，其重力的侧向分量即为作用于车辆质心的侧向力，如图 4.1 所示。接下来我们将研究，当该侧向力 Y 作用于质心时车辆的运动。

4.2.1　阶跃侧向力作用下车辆的运动

为了便于考察由侧向力 Y 引起的车辆运动，我们先观察车辆对某理想化的侧向力的响应。在这种情况下，阶跃变化通常可作为一个理想化的侧向力。现在我们观察：阶跃侧向力作用于一辆直线行驶的车辆的质心处的情况，如图 4.2 所示。

若这一干扰力作用的时间足够长，即使 Y_0 的幅值小，车辆最终也会偏离其原始路径。这种情况下，采用第 3.2.1 小节中的车辆坐标

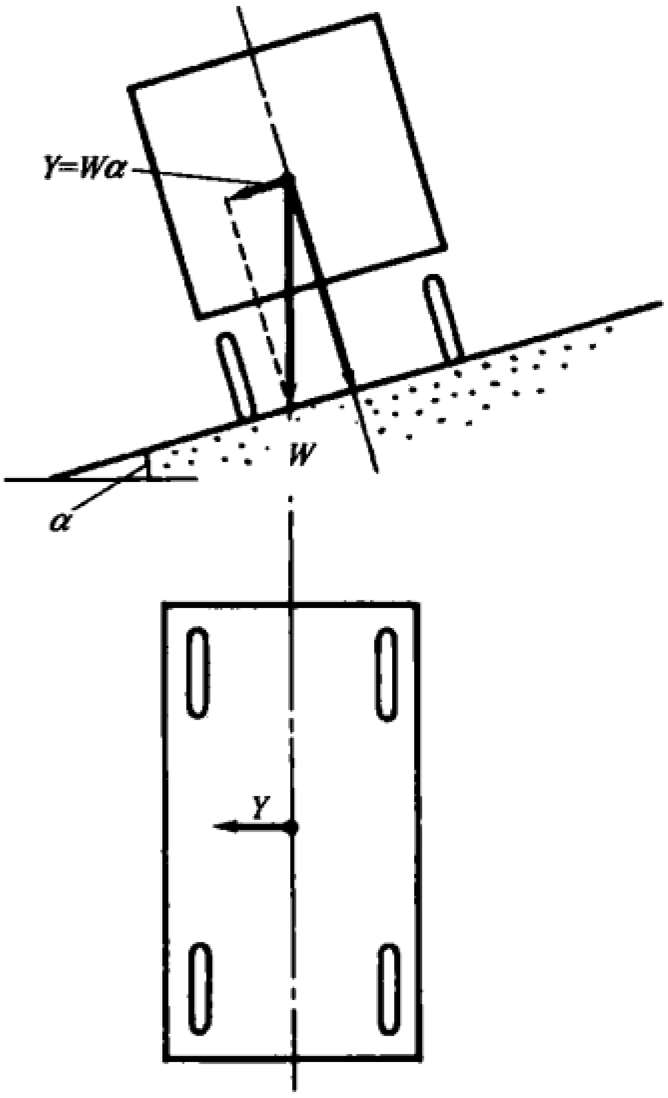


图 4.1　施加于车辆质心 CG 的侧向力

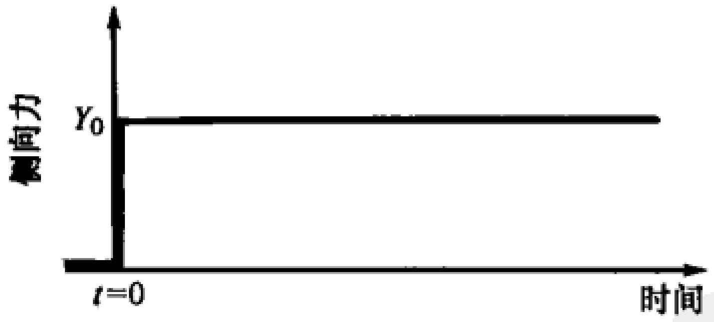


图 4.2　阶跃侧向力

系来描述车辆运动更为方便。

设前轮转角为零，持续作用于质心的侧向力为 Y，根据式(3.12)和式(3.13)，车辆的运动方程可表达如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=Y \qquad (4.1)$$

$$2(l_f K_f - l_r K_r)\beta + I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}r = 0 \tag{4.2}$$

这里，假定车辆运动过程中 Y 的幅值不大，且侧偏角条件 $|\beta| \ll 1$ 总成立。

通过对式(4.1)和式(4.2)进行拉普拉斯变换，可得到车辆的侧偏角和横摆角速度对侧向力 Y 的响应 $\beta(s)$ 和 $r(s)$，分别如下：

$$\beta(s) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{Y_0}{s} & mV + \dfrac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 0 & Is + \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + K_r) & mV + \dfrac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) & Is + \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} \end{vmatrix}} = \frac{Y_0}{mV}\frac{s + a_\beta}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{4.3}$$

$$r(s) = \frac{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + K_r) & \dfrac{Y_0}{s} \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + K_r) & mV + \dfrac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) & Is + \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} \end{vmatrix}} = \frac{Y_0}{mIV}\frac{a_r}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{4.4}$$

式中，$a_\beta = \dfrac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{IV}$；$a_r = -2(l_f K_f - l_r K_r)$；$\omega_n$、$\zeta$ 分别是由式(3.67)和式(3.68)所给出的固有频率和阻尼系数；Y_0/s 是侧向力 Y 的拉普拉斯变换。

1. 稳态条件

首先，我们将建立在图 4.2 所示的侧向力作用下车辆最终所达到的稳态条件。

通过拉普拉斯变换，分别得到 β 和 r 的稳态值如下：

$$\beta=\lim_{S\to 0}s\beta(s)=\frac{Y_0}{mV}\frac{\alpha_\beta}{\omega_n^2}=\frac{l_f^2K_f+l_r^2K_r}{2l^2K_fK_r\left[1-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}Y_0 \quad (4.5)$$

$$r=\lim_{S\to 0}sr(s)=\frac{Y_0}{mIV}\frac{\alpha_r}{\omega_n^2}=\frac{-(l_fK_f-l_rK_r)V}{2l^2K_fK_r\left[1-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}Y_0 \quad (4.6)$$

上述方程表明，β 总为正；r 则是在 $l_fK_f<l_rK_r$（即不足转向）情况下为正，而在 $l_fK_f>l_rK_r$（即过多转向）且 $V<V_c$ 时为负。

下面我们需要对式(4.5)和式(4.6)的物理意义作进一步讨论。对一辆具有不足转向特性的车辆而言，其稳态过程中的行驶条件和受力平衡稳态情况如图4.3所示。

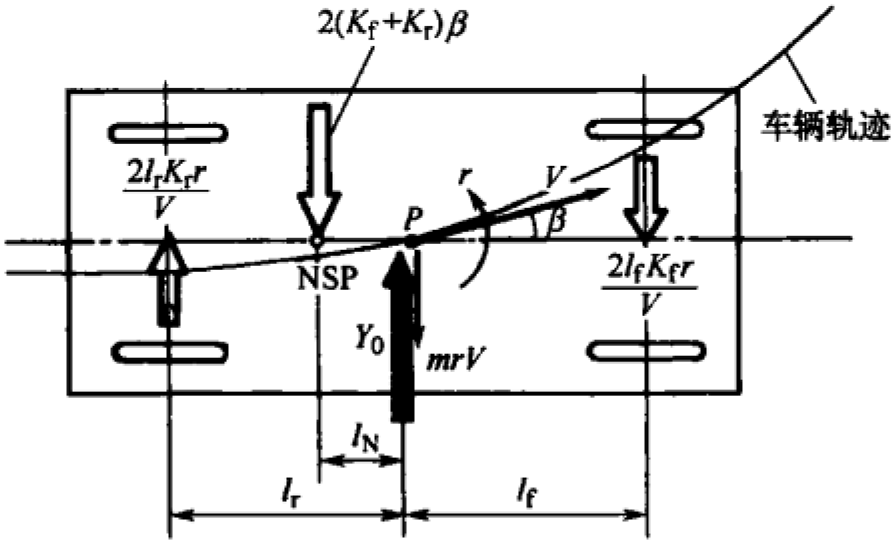


图4.3　具有不足转向特性车辆的稳态情况

若侧向干扰力 Y_0 作用于车辆质心 P 时，将产生运动，并产生一个正的侧偏角 β。由于 β 的存在，前、后轮胎将分别受到大小为 $2K_f\beta$ 和 $2K_r\beta$ 的作用力，其合力的作用点就是第3.3.3第三部分中所描述的中性转向点NSP。轮胎合力的大小为 $2(K_f+K_r)\beta$，作用方向与 Y_0 的方向相反。如果车辆表现为不足转向特性，合力作用点NSP将位于质心 P 的后方，并且会产生一个绕 P 点逆时针方向的横摆力矩，如图4.3所示。

如果车辆正处于稳态，那么一定会有一个力矩与上述横摆力矩相平衡。这个力矩只能由作用在轮胎上的力来产生。于是，除去 β 的因素之外，轮胎与路面之间一定会发生侧向的相对运动。这里，绕 P

点的逆时针的横摆运动所产生的前、后轮侧偏角分别为 $l_f r/V$ 和 $l_r r/V$，如图 4.3 所示。那么前、后轮胎的作用力大小则分别为 $l_f K_f r/V$ 和 $l_r K_r r/V$，且两者方向相反，以平衡由外部侧向力所产生的横摆力矩。这就说明了为什么在式(4.6)中的 r 为正，且表现为不足转向特性的车辆作逆时针圆周运动。车辆受到的离心力 mrV 也作用在质心上，且与 Y_0 方向相反。由于这些力处于平衡状态，因而车辆作稳态转向，且朝外偏离圆周向外运动。

对具有中性转向特性的车辆而言，其运动条件和受力平衡稳态情况如图 4.4 所示。

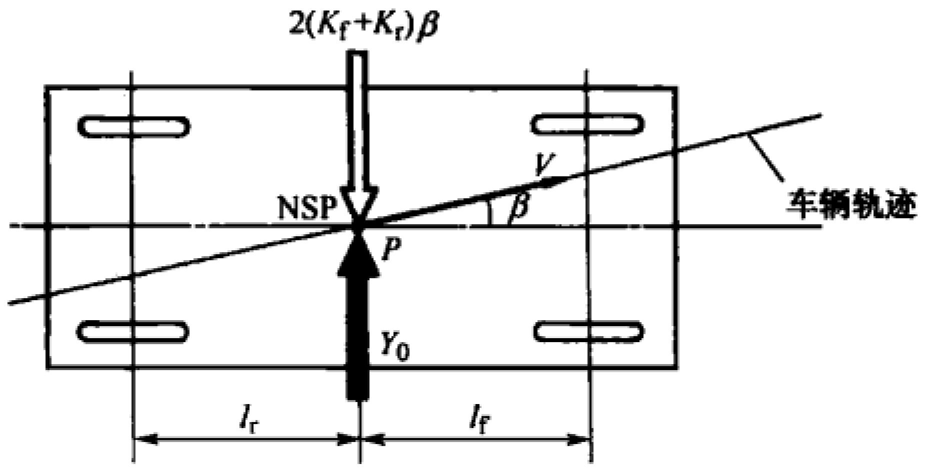


图 4.4　具有中性转向特性车辆的稳态情况

如果车辆具有中性转向特性，且合力作用点 NSP 与其质心 P 恰巧重合，大小为 $2(K_f + K_r)\beta$ 的轮胎力合力作用点将与 Y_0 重合。因此，该合力不产生绕质心 P 的力矩，从而车辆也就不会产生横摆运动。此时，无离心力作用于质心，因此式(4.6)中的 r 为零，轮胎力的合力与侧向外力 Y_0 相平衡。结果是，当产生侧偏角时，车辆仍继续它的平移运动。

对具有过多转向特性的车辆而言，其运动条件和受力平衡稳态情况如图 4.5 所示。

此时，由于侧向力 Y_0 的作用会使车辆产生侧偏角。而该侧偏角又会使前、后轮胎产生大小分别为 $2K_f\beta$ 和 $2K_r\beta$ 的作用力，其合力的作用点在 NSP。当车辆呈过多转向特性时，NSP 位于 P 点的前方，因此大小为 $2(K_f + K_r)\beta$ 的合力会产生一个绕质心顺时针方向的横摆力矩。当车辆处于稳态情况下，需要一个力矩来与此横摆力矩平衡。这

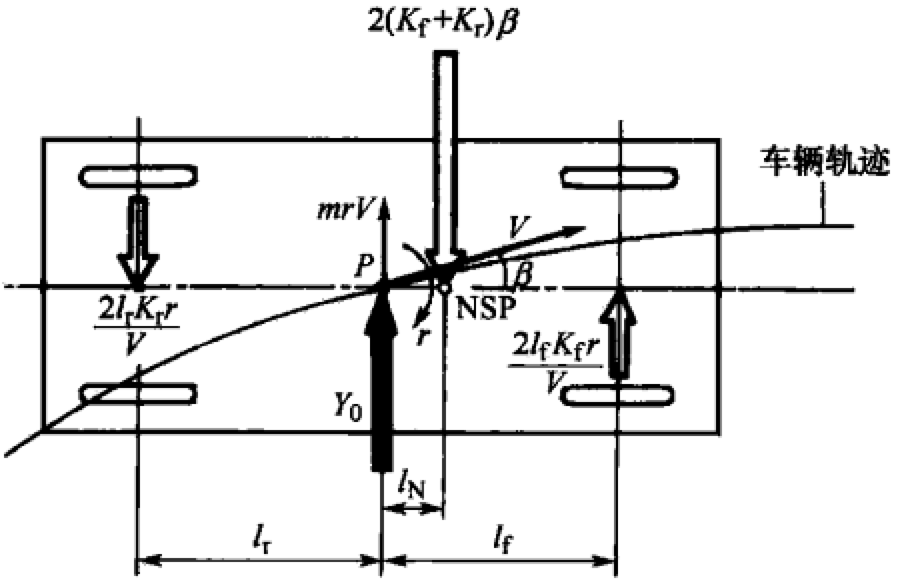


图 4.5　具有过多转向特性车辆的稳态情况

个力矩由前、后轮侧向力 $2l_fK_fr/V$ 和 $2l_rK_rr/V$ 获得，使得车辆作顺时针的横摆运动，从而使式(4.6)中的 r 为负。于是，作用于质心的离心力 mrV 与 Y_0 的方向相同。当车辆具有过多转向特性时，其稳态转向与不足转向特性时的情况相反，车头会朝着圆周内侧运动。

图 4.6a 和图 4.6b 给出了车辆在侧向力 Y_0 作用下，其侧偏角 β 和横摆角速度 r 在稳态转向中随车速的变化关系。

该图表明，对具有过多转向特性的车辆而言，其对外部扰动的敏感程度随着车速的增加而增加。

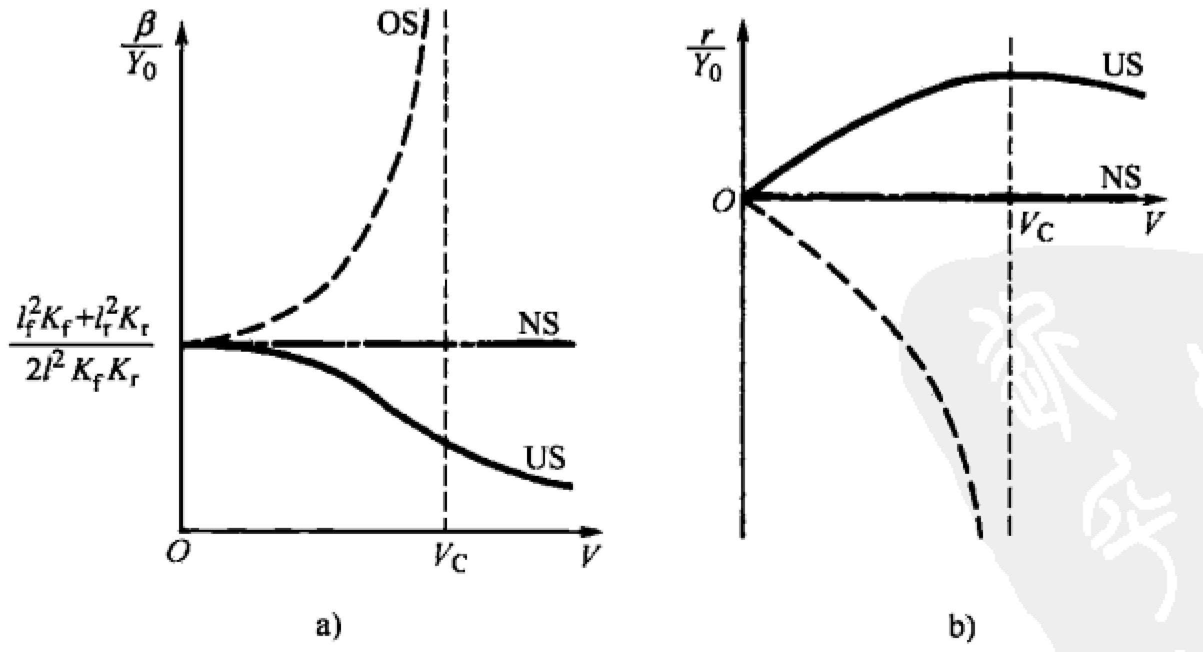


图 4.6　侧向力 Y_0 作用下的稳态转向

a）侧偏角随车速的变化关系　b）横摆角速度随车速的变化关系

2. 瞬态响应

在上一节中，我们考察了在受到一个侧向干扰 Y 时车辆的稳态运动条件。接下来，我们将研究车辆在达到稳态之前的瞬态响应。

在侧向干扰 Y 的作用下，车辆运动的瞬态响应可由拉普拉斯变换形式的式(4.3)、式(4.4)获得。我们将根据其阻尼的不同程度，来分别进行研究。

当 $\zeta>1$ 时，

$$\beta(t)=\frac{Y_0}{mV}\left[\frac{a\beta}{\omega_n^2}+\frac{a\beta-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}{2(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n^2}e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}-\frac{a\beta-(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}{2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n^2}e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right] \tag{4.7}$$

$$r(t)=\frac{Y_0}{mlV}\left[\frac{a_r}{\omega_n^2}+\frac{a_r-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}{2(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n^2}e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}-\frac{a_r-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}{2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n^2}e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right] \tag{4.8}$$

当 $\zeta=1$ 时，

$$\beta(t)=\frac{Y_0}{mV}\left[\frac{a\beta}{\omega_n^2}+\left(\frac{\omega_n-a\beta}{\omega_n^2}t-\frac{a\beta}{\omega_n^2}\right)e^{-\omega_n t}\right] \tag{4.7$'$}$$

$$r(t)=\frac{Y_0}{mlV}\left[\frac{a_r}{\omega_n^2}+\left(\frac{\omega_n-a_r}{\omega_n}t-\frac{a_r}{\omega_n^2}\right)e^{-\omega_n t}\right] \tag{4.8$'$}$$

当 $\zeta<1$ 时，瞬态响应表现为振荡，具体为

$$\beta(t)=\frac{Y_0}{mV}\left[\frac{a\beta}{\omega_n^2}+\frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{(a\beta-\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}\,e^{-\zeta\omega_n t}\times\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\Psi_\beta)\right] \tag{4.7$''$}$$

其中，

$$\Psi_\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{a\beta-\zeta\omega}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right)$$

$$r(t)=\frac{Y_0}{mlV}\left[\frac{a_r}{\omega_n^2}+\frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{(a_r-\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}\,e^{-\zeta\omega_n t}\right.$$

$$\times \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\Psi_r\right)\Big] \tag{4.8''}$$

其中，

$$\Psi_r=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{a_r-\zeta\omega}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right)$$

要获得对车辆瞬态运动的全面理解，仅根据车辆响应的时间历程是相当困难的。因此，具体情况具体分析可能会更有实际意义。首先，考虑不足转向车辆的情况。如果一个阶跃侧向力作用在直线行驶的车辆质心处，车辆将首先产生一质心侧偏角 β。此时，车辆未作任何其他的运动，只是其前、后轮产生了相同的侧偏角 β。上述情况如图 4.7a 所示。

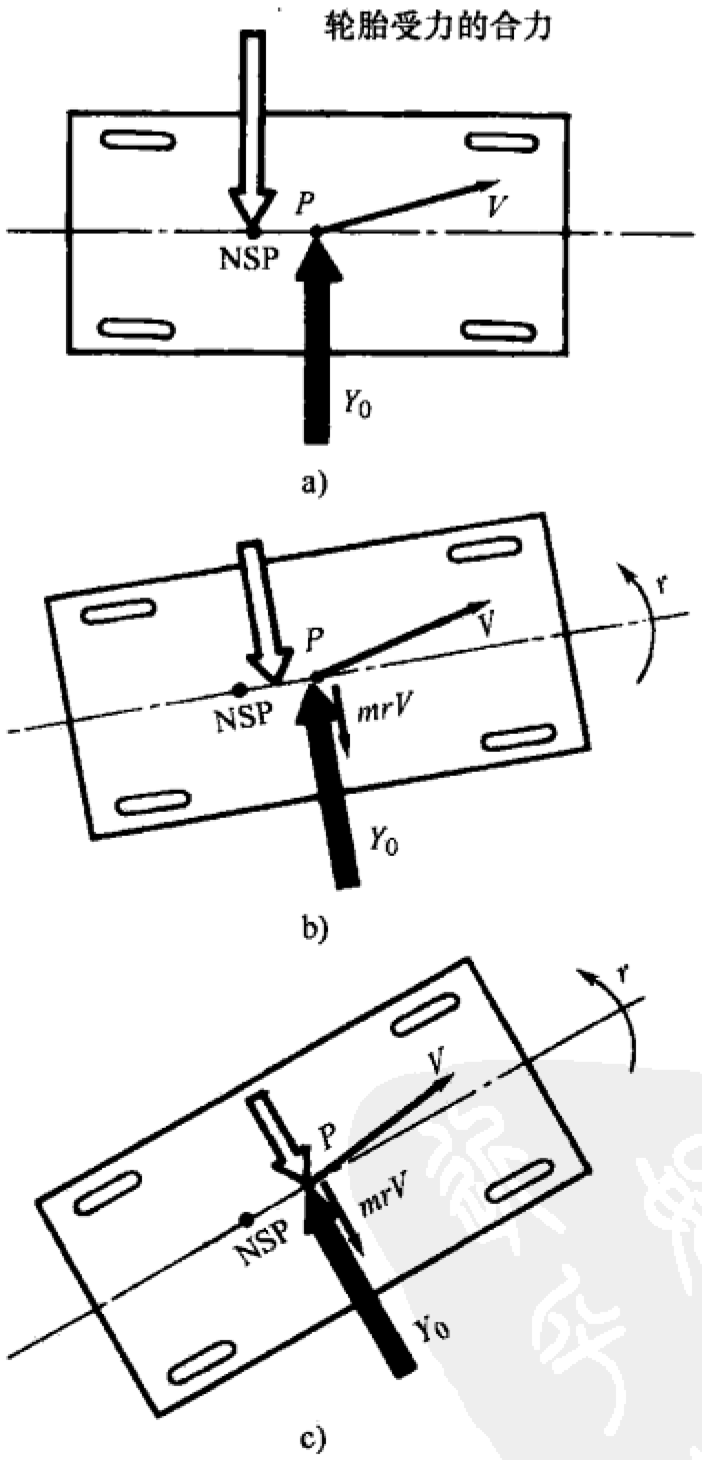


图 4.7　侧向力 Y_0 作用下不足转向车辆的瞬态运动

由于车辆呈不足转向特性，所导致的合力会产生一个绕车辆质心的逆时针的横摆力矩，因而车辆开始作横摆运动。这一横摆运动将会使起初产生的质心侧偏角变小，并导致新的前、后轮侧偏角的产生以及彼此反向的侧向力的产生。而由此所产生的力矩与由 β 产生的力矩方向相反。作用于质心的离心力与 Y_0 方向相反。上述情况如图 4.7b 所示。逆时针的横摆力矩减小了质心处的侧偏角。由于离心力与侧向力方向相反，维持平衡所需要的轮胎力合力相比图 4.7a 的情况变小。同

时，作用点从原来的 NSP 向 P 点移动，作用力矩相比图 4.7a 的情况变小。

以上述的方式，当受到侧向干扰 Y 的作用时，不足转向车辆的瞬态响应减弱了侧向干扰力的影响。正是由于侧向力 Y 引起的车辆运动，使得侧向力 Y 的影响变小了。最后，车辆运动达到稳态条件，如图 4.7c 所示。如果车辆呈中性转向特性，其轮胎力合力的作用点与侧向力的作用点 P 重合。结果是，无横摆力矩作用于车辆。当式(4.1)和式(4.2)中的 $l_fK_f = l_rK_r$ 时，r 和 β 将相互独立而不耦合。只要是侧向力作用于车辆质心，r 就不会受其他因素的影响。换句话说，中性转向车辆对作用于其质心的侧向力 Y 的响应，仅由其侧偏运动来体现。

对过多转向车辆而言，如前述两种情况一样，它将在侧向力作用下于质心处产生一个侧偏角 β。此时，前、后轮侧偏角都等于 β，并且合力作用点为 NSP，如图 4.8a 所示。

由于车辆呈过多转向特性，导致的合力将产生一个绕车辆质心的顺时针方向的横摆力矩。因为由横摆运动引起的作用于质心的离心力与侧向力 Y_0 方向相同，使得这一横摆运动增大了起初的车辆质心侧偏角。上述情况如图 4.8b 所示。随着顺时针的横摆力矩增加，车辆质心侧偏角将变大，且由于离心力与侧向力方向

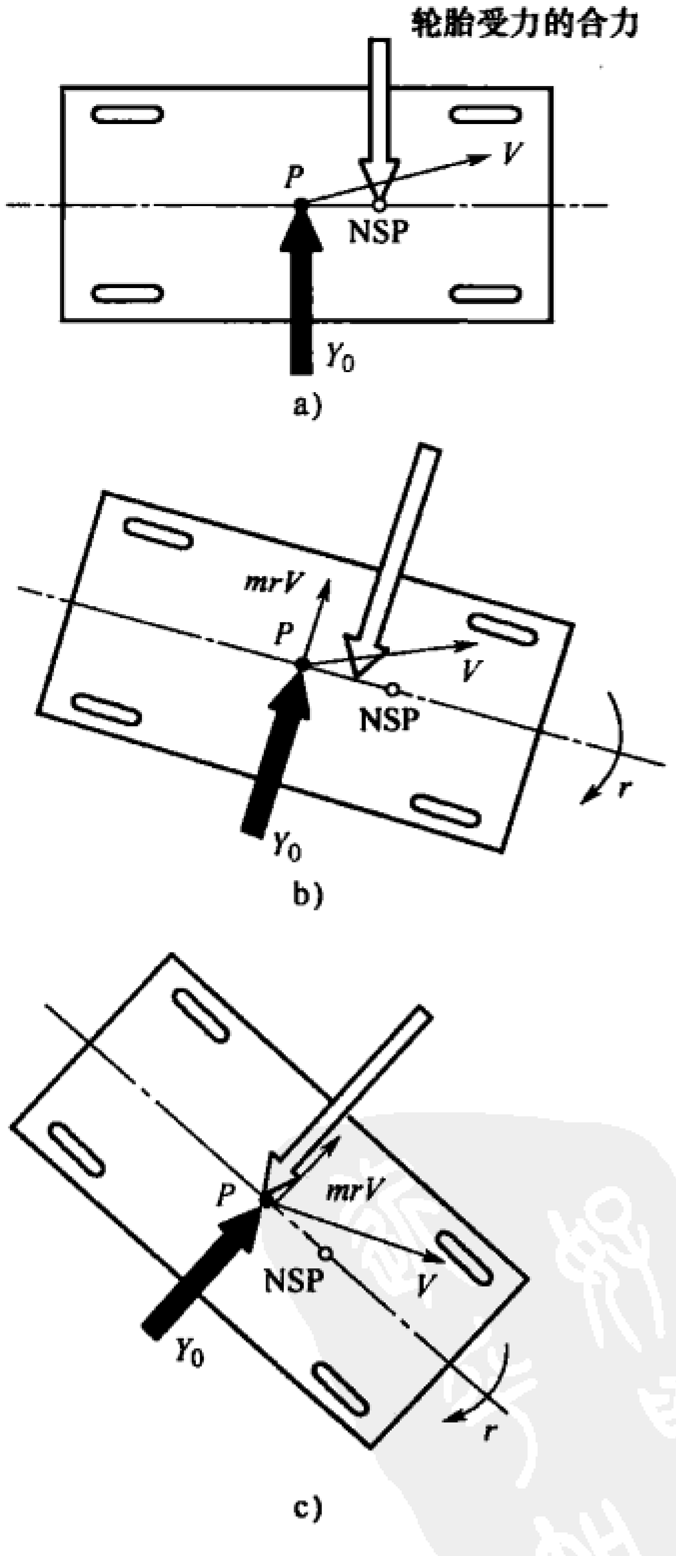


图 4.8　侧向力 Y_0 作用下过多转向车辆的瞬态运动

相同，轮胎合力变得比图 4.8a 的情况更大。尽管合力的作用点从起初的 NSP 点移向 P 点，但由于合力的幅值增加了，作用于车辆的力矩不会像不足转向的情况那样变小。

当呈过多转向特性时，车辆并不总是像不足转向情况那样，会减弱外部侧向力 Y 的影响。相反，车辆的运动有可能会激发 Y 对车辆的影响。特别是离心力会随车速的增加急剧增加。当超过某一极限车速时，由车辆横摆运动引起的离心力会变得过大，且会增大作用于车辆的横摆力矩。最终，车辆可能会陷入旋转运动。这里所说的极限车速，就是第 3.4.1 小节第一部分中推导的临界车速 V_c，也是使式(4.5)和式(4.6)的分母为零的车速。当车速低于 V_c 时，轮胎力合力作用在 P 点，且与离心力和侧向干扰 Y_0 相平衡，车辆达到如图 4.8c 所示的稳态条件。

当车辆呈过多转向特性时，即使未达到不稳定条件(即 $V<V_c$)，但由作用于质心的侧向力引起的车辆运动仍会激发车辆运动。当 $V>V_c$ 时，车辆动力学真正地落入了数学意义上的不稳定条件，车辆无法达到稳态。图 4.9 示意性地给出了相应于不同转向特性，车辆在侧向力 Y 作用下的运动情况。

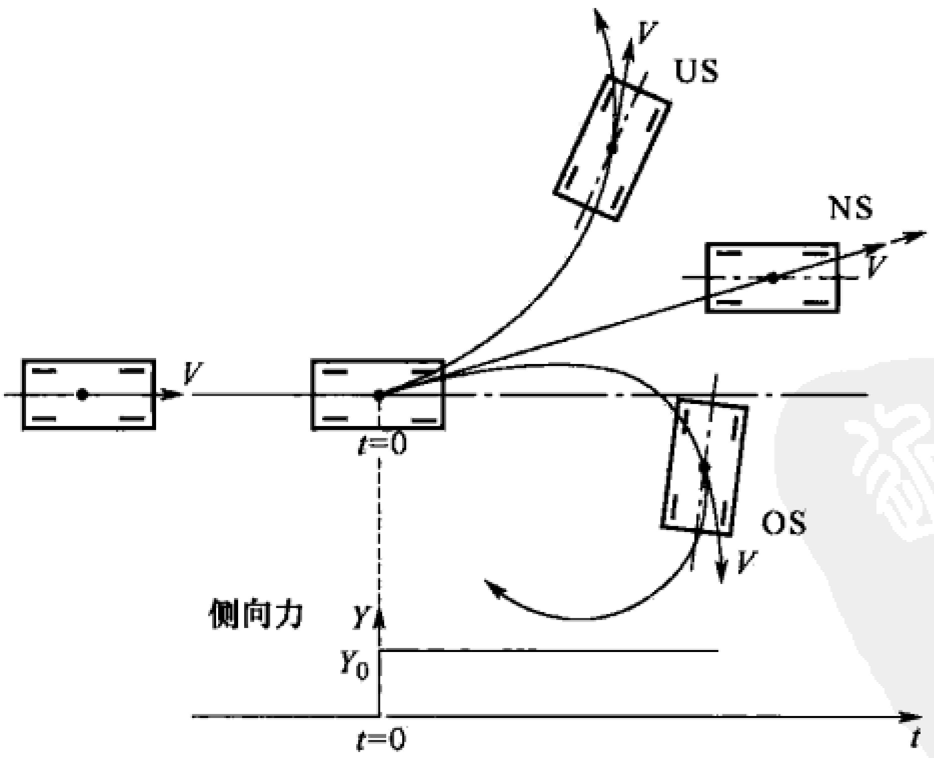


图 4.9 质心受阶跃侧向力作用下车辆的运动

例题 4.1

为了更加准确地理解车辆对作用于质心的阶跃侧向干扰所引起的车辆时域响应，并核实图 4.9 示意性描述的转向特性对车辆响应的影响，试采用 Matlab-Simulink 软件，仿真在车辆质心处受到 4kN 的侧向力时车辆的响应。设车辆的行驶车速为 80km/h，转向角始终固定为 0。分别计算具有不足转向、中性转向和过多转向的车辆，其行驶轨迹及其横摆角速度和侧偏角的响应。仿真中的车辆参数来自例题 3.7。

题解：

此仿真基于与例题 3.6 同样的方程，仅需使 $\delta=0$，得到的方程如下：

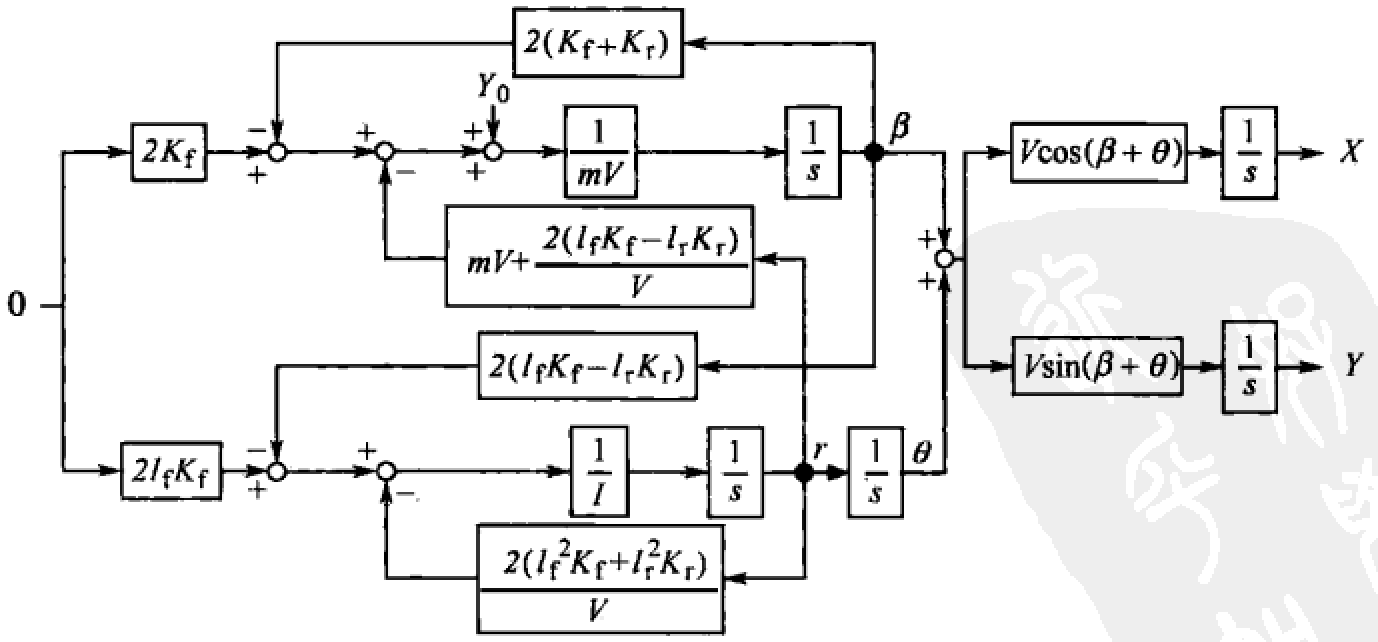
$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=-\frac{2(K_{\mathrm{f}}+K_{\mathrm{r}})}{mV}\beta-\left[1+\frac{2}{mV^2}(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\right]r+\frac{Y_0}{mV} \quad \text{(E4.1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})}{I}\beta-\frac{2(l_{\mathrm{f}}^2K_{\mathrm{f}}+l_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{r}})}{IV}r \quad \text{(E4.2)}$$

此外，在仿真计算车辆轨迹时，还要用到例题 3.2 中引用的公式如下：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=V\cos(\beta+\theta) \quad \text{(E3.1)}$$

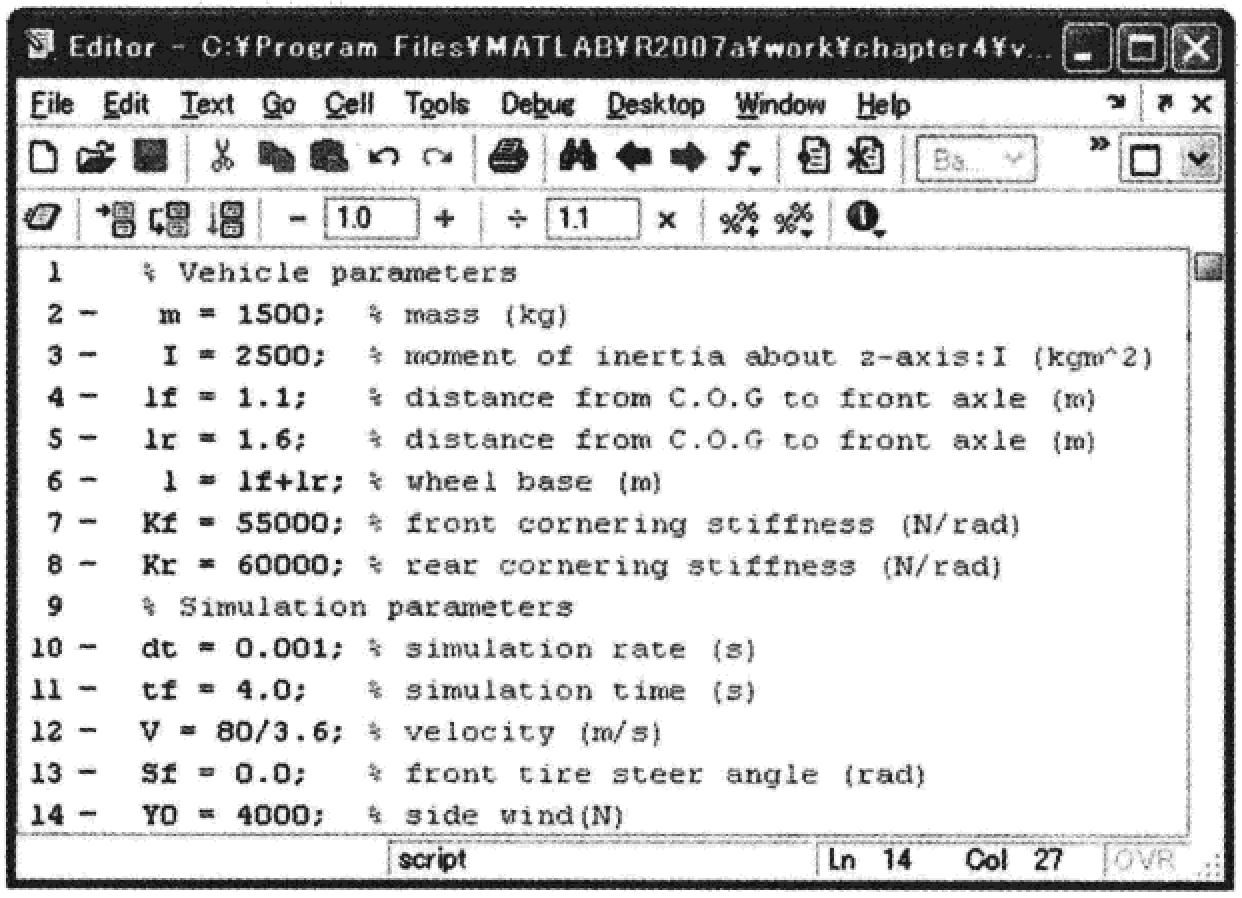
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=V\sin(\beta+\theta) \quad \text{(E3.2)}$$



a)

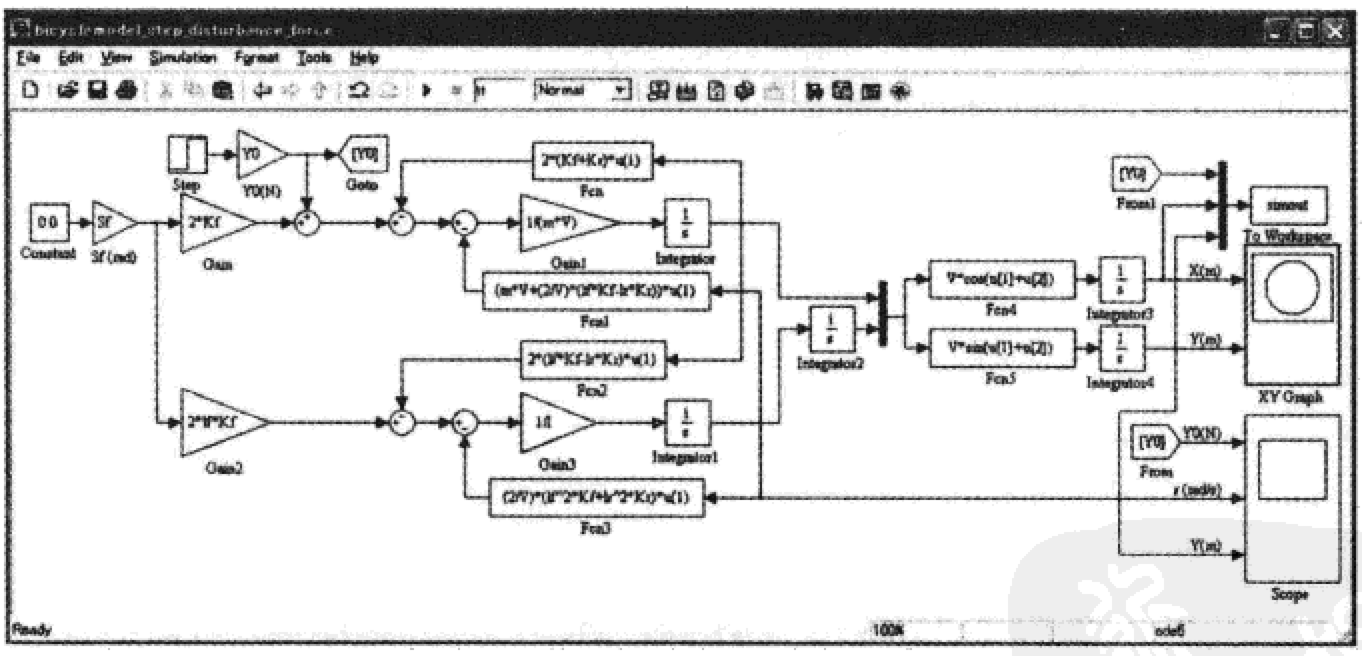
例题 4.1 图　受侧向力作用下的车辆仿真

a）车辆运动积分形式框图



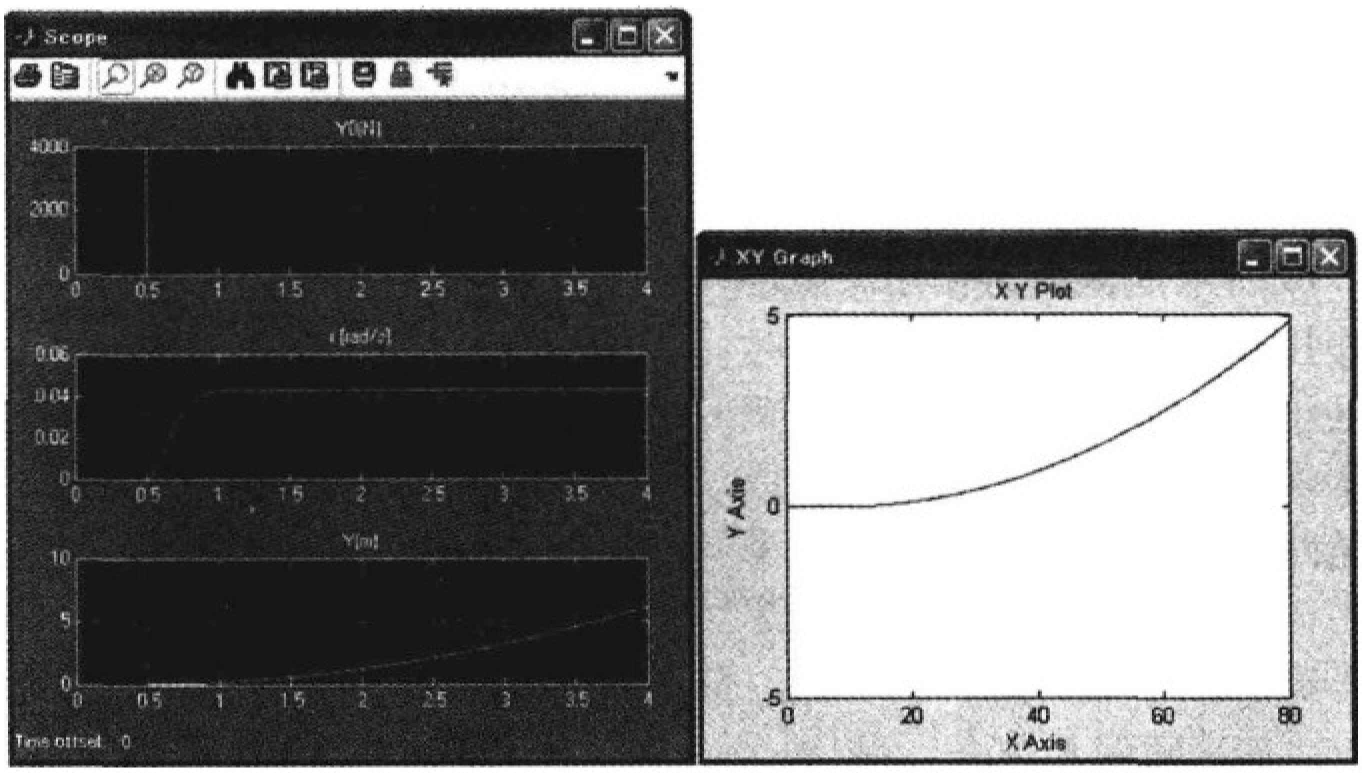
```
% Vehicle parameters
 m = 1500;  % mass (kg)
 I = 2500;  % moment of inertia about z-axis:I (kgm^2)
lf = 1.1;   % distance from C.O.G to front axle (m)
lr = 1.6;   % distance from C.O.G to front axle (m)
 l = lf+lr; % wheel base (m)
Kf = 55000; % front cornering stiffness (N/rad)
Kr = 60000; % rear cornering stiffness (N/rad)
% Simulation parameters
dt = 0.001; % simulation rate (s)
tf = 4.0;   % simulation time (s)
V = 80/3.6; % velocity (m/s)
Sf = 0.0;   % front tire steer angle (rad)
Y0 = 4000;  % side wind(N)
```

b)

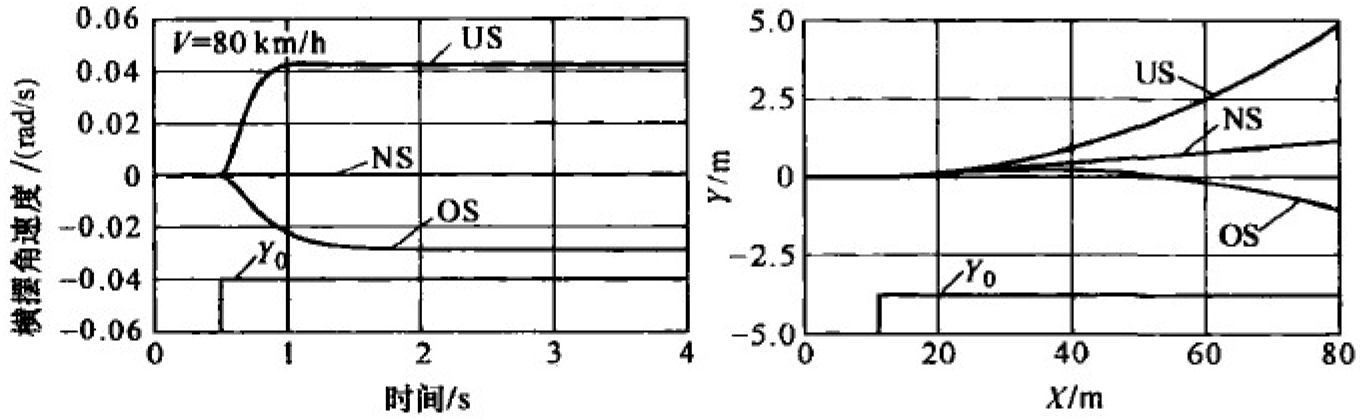


c)

例题4.1图　受侧向力作用下的车辆仿真(续)
b）车辆参数　c）仿真程序



d)



e)

例题4.1图 受侧向力作用下的车辆仿真(续)
d) 仿真结果 e) 车辆转向特性对车辆运动的影响

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r \tag{E4.3}$$

根据以上方程，可建立受作用于CG侧向干扰时，车辆运动积分形式框图，如例题4.1图a所示。仿真过程中采用的车辆参数如例题4.1图b所示。例题4.1图c中给出了仿真程序。例题4.1图d给出了仿真结果。车辆转向特性对车辆运动的影响如例题4.1图e所示。

4.2.2 脉冲侧向力作用下车辆的运动

前面我们研究了理想阶跃侧向力作用于车辆质心时的车辆运

动。但对实际的车辆而言，很少有作用于其质心的持续长时间的侧向力的情况。车辆行驶在部分倾斜的直路面上反而是一种更为实际的情况。

这种情况下，车辆受图4.10所示的侧向力作用。假定作用于车辆侧向的脉冲力的时间积分 $Y_0\Delta t$ 并不太大，故车辆即使受此作用也不会偏离其原始路径太多。这种情况下，采用固定于地面的坐标系来描述车辆的运动更为方便。

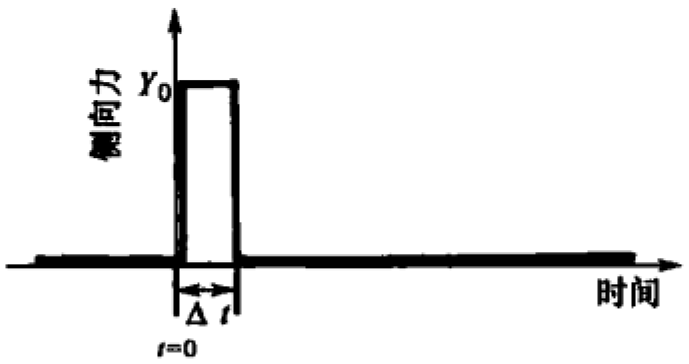


图4.10 作用于质心的脉冲侧向力

如果转向角为零，当 $|\theta| \ll 1$ 时，采用式(3.21)和式(3.22)，在侧向力 Y 作用下的车辆运动方程可表述如下：

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2(K_f+K_r)}{V}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{2(I_fK_f-I_rK_r)}{V}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-2(K_f+K_r)\theta=Y \tag{4.9}$$

$$\frac{2(I_fK_f-I_rK_r)}{V}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2(I_f^2K_f^2+I_rK_r)}{V}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-2(l_fK_f-l_rK)\theta=0 \tag{4.10}$$

当 Δt 相比车辆的运动变化周期足够小时，侧向力 Y 的近似拉普拉斯变换 $Y(s)$ 可记为 $Y_0\Delta t$。因此，车辆对侧向力 Y 的响应可通过对上述方程进行拉普拉斯变换获得，得到的 $y(s)$ 和 $\theta(s)$ 分别如下：

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} Y_0\Delta t & \dfrac{2(I_fK_f-I_rK_r)}{V}S-2(K_f+K_r) \\ 0 & Is^2+\dfrac{2(I_f^2K_f+I_r^2K_r)}{V}S-2(l_fK_f-l_rK_r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ms^2+\dfrac{2(K_f+K_r)}{V}S & \dfrac{2(I_fK_f-I_rK_r)}{V}S-2(K_f+K_r) \\ \dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}S & Is^2+\dfrac{2(I_f^2K_f+I_r^2K_r)}{V}S-2(l_fK_f-l_rK_r) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{Y_0\Delta t}{m}\frac{s^2+a_{y1}s+a_{y2}}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \tag{4.11}$$

$$\theta(s)=\frac{\begin{vmatrix} ms^2+\dfrac{2(K_f+K_r)}{V}S & Y_0\Delta t \\ \dfrac{2(I_fK_f+I_rK_r)}{V}S & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ms^2+\dfrac{2(K_f+K_r)}{V}S & \dfrac{2(I_fK_f+I_rK_r)}{V}S-2(K_f+K_r) \\ \dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}S & Is^2+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}S-2(l_fK_f-l_rK_r) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{Y_0\Delta t}{mIV}\frac{a_r}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \tag{4.12}$$

其中，

$$a_{y1}=\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{IV}$$

$$a_{y2}=\frac{-2(l_fK_f-l_rK_r)}{I}$$

$$a_r=-2(l_fK_f-l_rK_r)$$

根据以上方程，当车辆达到稳态时，有：

$$\begin{aligned} y&=\lim_{s\to 0}sy(s)=\pm\infty\ (\text{其中 } I_fK_f\neq I_rK_r) \\ &=\frac{I_f^2K_f+I_r^2K_r}{2l^2K_fK_r}VY_0\Delta t\ (\text{其中 } I_fK_f=I_rK_r) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\theta=\lim_{s\to 0}s\theta(s)=\frac{-(l_fK_f-l_rK_r)VY_0\Delta t}{2l^2K_fK_r\left[1-\dfrac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]} \tag{4.14}$$

当 $l_fK_f<l_rK_r$、车辆呈不足转向特性时，$y=+\infty$；当 $l_fK_f>l_rK_r$、车辆呈过多转向特性时，$y=-\infty$。并且，θ 的值对不足转向车辆为正；对过多转向车辆为负；而对中性转向车辆为零。

在 $0\leqslant t\leqslant\Delta t$ 时间段内，车辆对侧向力 $Y=Y_0$ 的瞬态响应与阶跃侧向力作用下的瞬态响应相同。在 $t=\Delta t$ 时刻，侧向力 Y 变为 0，车辆质心处的侧偏角立刻减小，由横摆运动引起的轮胎侧向力变得更具主导作用，以抑制车辆的横摆运动，并使车辆维持一个相对原有行驶

方向恒定的横摆角。这个横摆角对不足转向车辆为正；而对过多转向车辆为负。因此，对车辆在绝对坐标系中的侧向位移 y 而言，对不足转向车辆沿正方增大；而对过多转向车辆则沿负向增大。

当车辆呈中性转向特性时，车辆不会产生横摆角，因而在原有运动方向作一恒定的侧向位移后，仍继续沿原有方向直线行驶。

图 4.11 给出了具有不同转向特性的车辆对侧向力 Y 的响应。

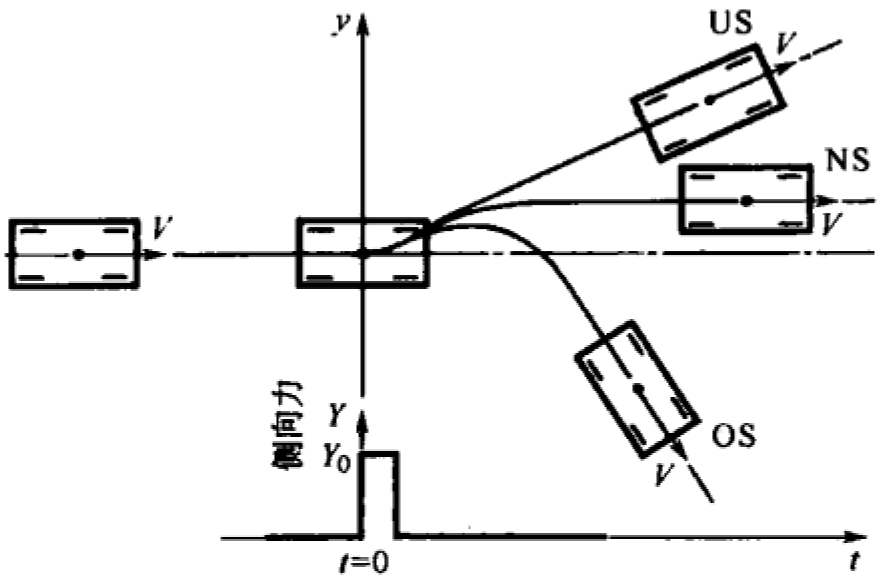


图 4.11　质心受脉冲侧向力作用下车辆的运动

4.2.3　外部干扰引起的车辆运动及转向特性

通过以上研究可知，质心处受外部侧向力作用引起的车辆运动很大程度上取决于车辆的转向特性。基于之前的研究，并考虑由质心处受外部侧向力引起的车辆运动，我们重新总结关于车辆转向特性的概念如下。

假设行驶中的车辆由于某种原因突然产生一个横摆角速度 r，则其质心将受到离心力 mrV 的作用。如前面的章节所述，因由外部干扰引起的质心侧偏角的缘故，侧向力会作用于前、后轮胎。而其合力的作用点为 NSP。当 NSP 位于车辆质心的后方时，该合力将抑制由横摆角速度 r 引起的车辆横摆运动。即，不足转向特性的车辆能抑制车辆的横摆运动。

如果 NSP 位于车辆质心之前，轮胎力的合力将激发车辆的横摆运动。需要说明的是，过多转向特性具有对运动的激发机制，而该运动是由车辆通过自身运动的干扰所产生的。从动力学角度看，这就是

为何具有过多转向特性的车辆被视作方向稳定性方面恶劣的缘故。而中性转向特性情况下，由质心侧偏角引起的轮胎力的合力对车辆横摆运动没有影响。

上述讨论如图 4. 12 所示。

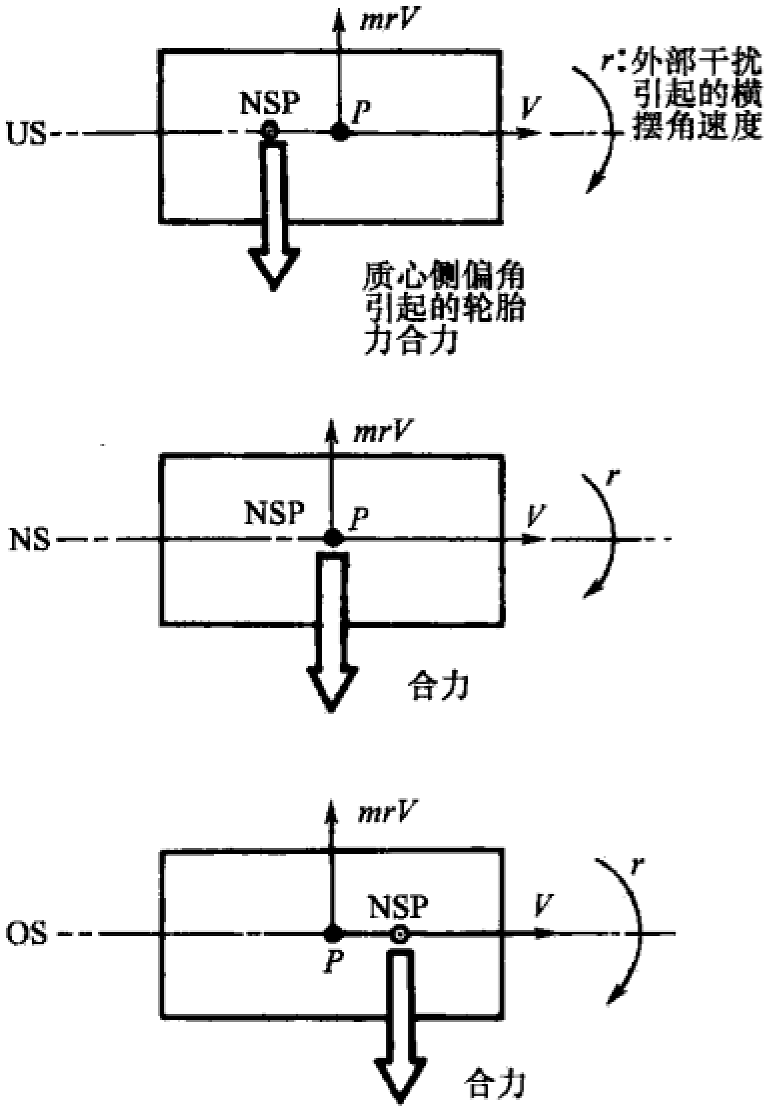


图 4. 12　外部干扰引起的车辆运动及车辆的转向特性

对车辆转向特性的研究不仅描述了车辆的稳态运动特性，重要的是，还强烈地指明了车辆在外部干扰下的运动特性。在此，我们理解了：相互耦合的车辆侧偏角和横摆运动是决定车辆转向运动的主要因素。

在 4. 2. 1 小节中已知，当一恒定的侧向力 Y_0 作用于以一定速度 V 行驶的车辆质心时，车辆将产生横摆角速度 r，其大小由式(4. 6)给出。于是，车辆质心处的加速度 $\ddot{y}$ 为

$$\ddot{y} = Vr = \frac{-\frac{m(l_f K_f - l_r K_r)}{2l^2 K_f K_r} V^2}{1 - \frac{m(l_f K_f - l_r K_r)}{2l^2 K_f K_r} V^2} \frac{Y_0}{m} \tag{4.15}$$

另外，侧向力 Y_0 的大小还可用下面的加速度单位表示：

$$\ddot{y}_0 = \frac{Y_0}{m} \tag{4.16}$$

$\ddot{y}$ 和 $\ddot{y}_0$ 的比值称为不足转向率[1]，以 U_R 表示。车辆的转向特性也可用 U_R 来表述如下：

$$U_R = \frac{\ddot{y}}{\ddot{y}_0} \tag{4.17}$$

具有 100% 不足转向率（即 $U_R = 1$）的车辆，其质心加速度为 Y_0/m，圆周运动半径为 mV^2/Y_0。当 U_R 为零时，车辆表现为中性转向特性；当 U_R 为负时，车辆表现为过多转向特性。

当转向角为零时，车辆的转向特性不仅是车辆的稳态转向特性，还是质心处受外部干扰作用下的特性。将式（4.15）和式（4.16）代入式（4.17）中，并采用式（3.43）中的稳定性因子 A 来表达，则 U_R 可写为

$$U_R = \frac{AV^2}{1 + AV^2} \tag{4.18}$$

由上式可知：当 $A > 0$ 时，不论车速 V 多大，U_R 都是小于 1 的正值。也就是说，如果车辆为不足转向特性，大小为 Y_0 的外部力作用于车辆质心时，侧向加速度总是小于 Y_0/m。相反，当 $A < 0$，U_R 小于 0，为了满足 $AV^2 < -0.5$，U_R 的绝对值将大于 1。当车辆呈现过多转向特性时，当车速低于某一临界车速时，车辆侧向加速度小于 Y_0/m；但当车速大于该临界车速时，侧向加速度将大于 Y_0/m。

车辆对突发的横摆力矩干扰（图 4.13）的响应，有助于我们更好地理解：过度转向车辆对外部扰动更加敏感、方向稳定性更差。

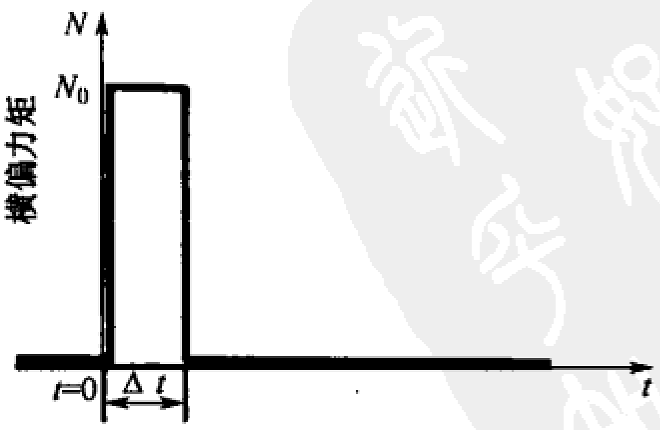


图 4.13　横摆力矩干扰

由该横摆力矩产生的车辆运动可以如下方程来描述：

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2(K_f+K_r)}{V}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-2(K_f+K_r)\theta=0 \tag{4.9'}$$

$$\frac{2\ (l_fK_f-l_rK_r)}{V}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-2(l_fK_f-l_rK)\theta=N \tag{4.10'}$$

对上述方程进行拉普拉斯变换，可得到阶跃横摆力矩输入下的稳态横摆角如下：

$$\theta=\lim_{s\to0}s\theta(s)=\frac{(K_f+K_r)VN_0\Delta t}{2l^2K_fK_r\left[1-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}$$

其中，要保证 Δt 足够小，以使大小为 N_0 的横摆脉冲力矩 N 的拉普拉斯变换为 $N_0\Delta t$。

上述方程给出了在阶跃横摆力矩输入下，车辆姿态角随车速的变化关系，如图 4.14 所示。显然，车辆的过多转向特性越强，车辆的姿态角变化将越大，对外部的扰动越敏感。

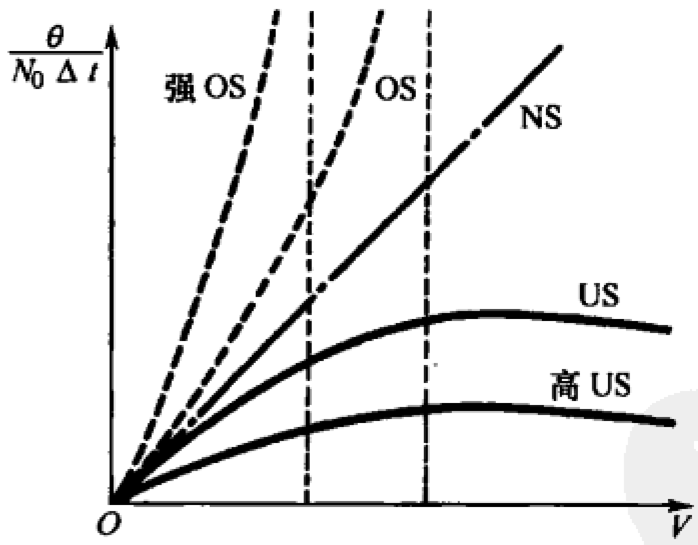


图 4.14　阶跃横摆力矩干扰下车辆姿态角的变化

4.3　侧风引起的车辆运动

高速行驶的车辆在受到侧向风力作用时，将会产生侧向运动。本

节中将在直线行驶、有侧向风扰动的情况下，考察车辆最基本的运动特性。

4.3.1 侧风干扰力

设以速度 V 直线行驶的车辆，受到速度为 w 的侧向风的作用，如图 4.15 所示。则作用于车辆的侧向力 Y_w 和横摆力矩 N_w 表达如下：

$$Y_w = C_y \frac{\rho}{2} S(V^2 + w^2) \tag{4.19}$$

$$N_w = C_n \frac{\rho}{2} lS(V^2 + w^2) \tag{4.20}$$

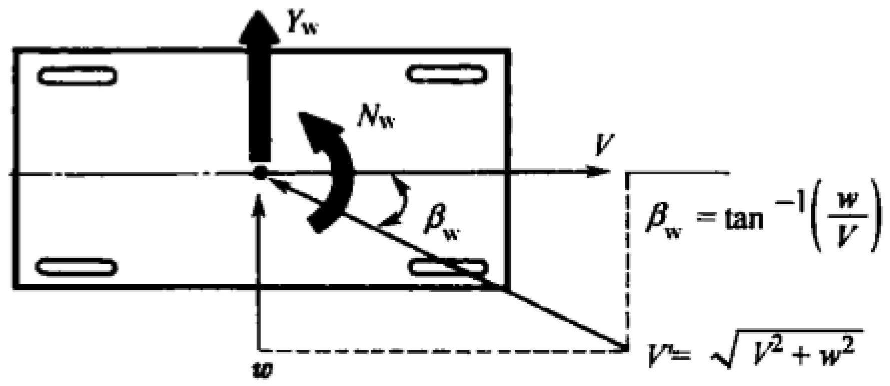


图 4.15 侧风引起的扰动力和横摆力矩

式中，C_y 为侧向力系数，C_n 为横摆力矩系数，两者均为气流相对侧偏角 β_w 的函数，并定义 C_n 逆时针方向为正；ρ 为空气密度；S 为车辆的迎风面积；l 表示车辆尺寸，通常取为轴距。

图 4.16 给出了一个普通的乘用车的侧向力系数和横摆力矩系数与气流相对侧偏角的关系[2]。该图表明，C_y 和 C_n 均随 β_w 的增加而增加，并显著受到车辆形状的影响。

侧向力 Y_w 的作用点称为空气力学中心（AC）。设 AC 与车辆质心的距离为 l_w，并定义 AC 在车辆质心之后时 l_w 为正。于是，作用于车辆的横摆力矩 N_w 可写为

$$N_w = -l_w Y_w$$

由侧风引起的车辆运动与作用于车辆 AC 的侧向力 Y_w 以及 AC 至车辆质心的距离 l_w 有关，如图 4.17 所示。

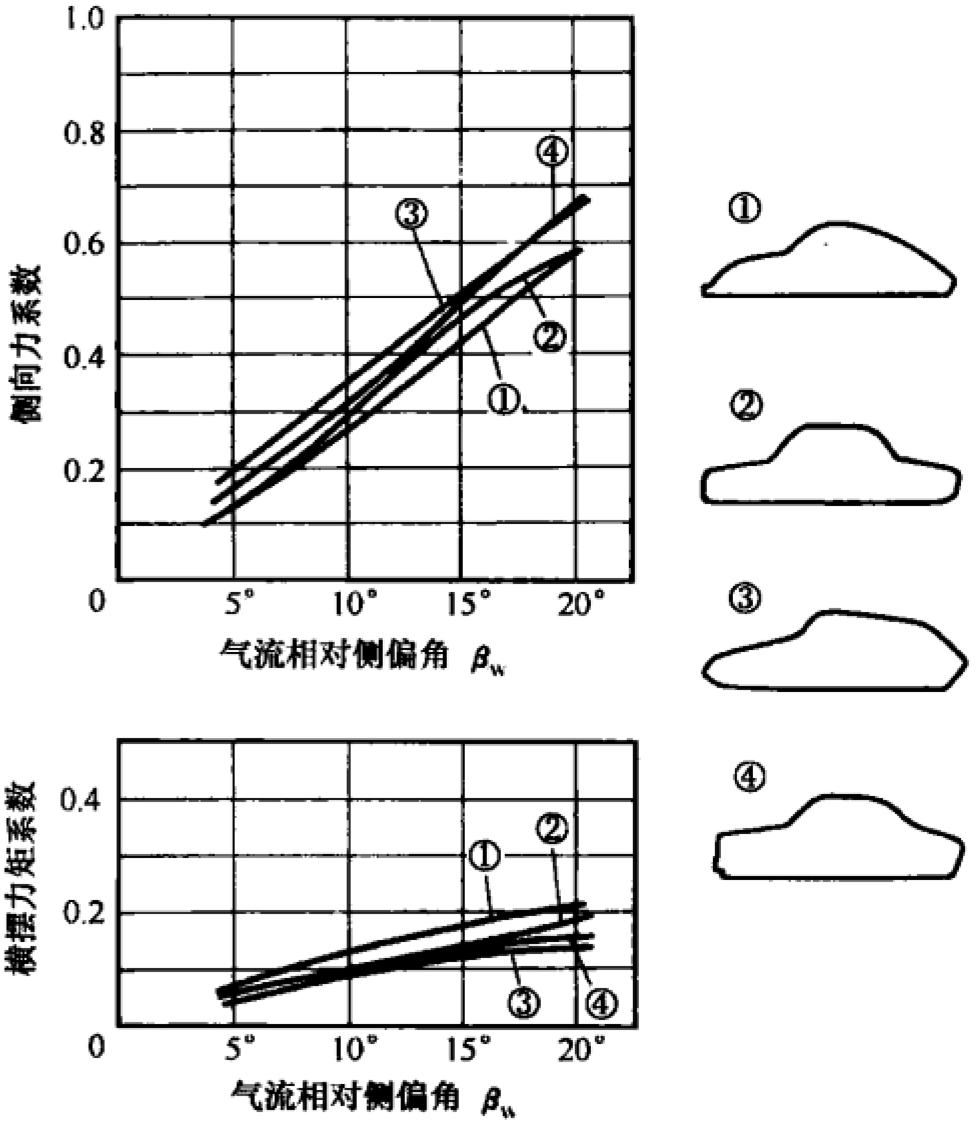


图 4.16　侧风的侧向力系数和横摆力矩系数

严格地说，C_y 和 C_n 随 β_w 变化而变化，而 β_w 又随着车辆的运动而变化。例如，车辆受到恒定的侧向风作用时，受到的侧向力 Y_w 和横摆力矩 N_w 会随车辆的运动而变化。如果车辆的瞬态运动时间不是太长，为简化分析，还是可以将 Y_w 和 N_w 视作独立于车辆运动、与车辆运动无关的量。

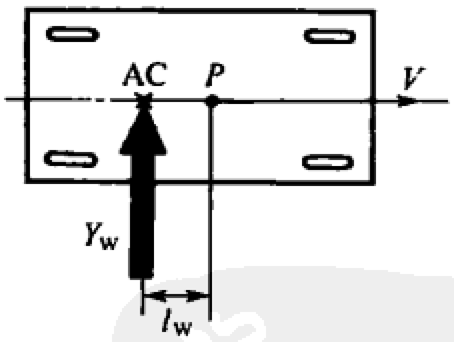


图 4.17　由侧风引起的侧向力

4.3.2　由恒定速度侧风引起的车辆运动

如图 4.18 所示，车辆受到一个速度恒定的侧风作用。此时，假定侧向力 Y_w 为阶跃力并作用于车辆的 AC。

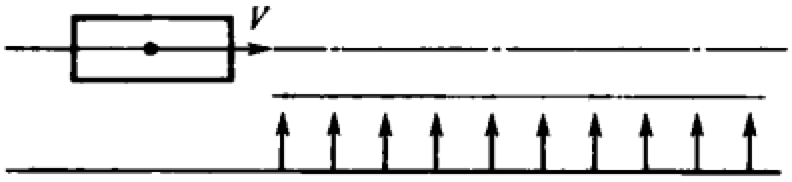


图 4.18 速度恒定的侧向风

与 4.2.1 小节相同，我们用固定于车辆的坐标系来方便地表达车辆的运动。采用式(3.12)和式(3.13)，车辆的运动方程推导如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left\{mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right\}r=Y_w \quad (4.21)$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=-l_wY_w \quad (4.22)$$

如 4.2.1 小节中一样，车辆对 Y_w 的响应可通过对式(4.21)和式(4.22)进行拉普拉斯变换获得，故有：

$$\beta(s)=\frac{Y_{w0}}{MV}\frac{s+b_\beta}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \quad (4.23)$$

$$r(s)=\frac{-l_wY_{w0}}{I}\frac{s+b_r}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \quad (4.24)$$

其中，

$$b_\beta=\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2l_w(l_fK_f-l_rK_r)}{IV}+\frac{ml_wV}{I}$$

$$=\frac{2}{IV}\left[l_f^2K_f+l_r^2K_r-l_wl_N(K_f+K_r)\right]+\frac{ml_wV}{I}$$

$$b_r=\frac{2(K_f+K_r)}{mV}+\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{ml_wV}=\frac{2(l_w-l_N)}{ml_wV}(K_f+K_r)$$

Y_{w0}为阶跃侧向力的幅值。根据上述方程，β 和 r 的稳态值如下：

$$\beta=\frac{\left[(l_f^2K_f+l_r^2K_r)-l_wl_N(K_f+K_r)\right]+\frac{ml_w}{2}V^2}{2l^2K_fK_r\left[1-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}Y_{w0} \quad (4.25)$$

$$r=\frac{(l_N-l_w)(K_f+K_r)V}{2l^2K_fK_r\left[1-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}Y_{w0} \quad (4.26)$$

式中，l_N 为 NSP 至车辆质心的距离，等于：

$$l_N = -\frac{(l_f K_f - l_r K_r)}{K_f + K_r} \tag{3.44}$$

由式(4.26)可知：当 $l_N > l_w$ 时，$r > 0$；当 $l_N = l_w$ 时，$r = 0$；当 $l_N < l_w$ 时，$r < 0$。这里，当 NSP 和 AC 位于车辆质心后方时，定义 l_N 和 l_w 为正；且当 $l_f K_f - l_r K_r > 0$ 时，假定 $V < V_c$。

直线行驶中的车辆，持续受到恒定速度的侧风作用，如果其空气力学中心 AC 位于其 NSP 的前方，车辆将最终沿逆时针方向作圆周运动；若 AC 与 NSP 恰巧重合，车辆将不作圆周运动(瞬态期间除外)；若 AC 位于 NSP 后方，则车辆沿顺时针方向作圆周运动。而车辆质心与 AC 和 NSP 的相对位置则对车辆运动无直接影响。图 4.19 给出了一辆轿车在侧风干扰下，其运动的计算机仿真结果。

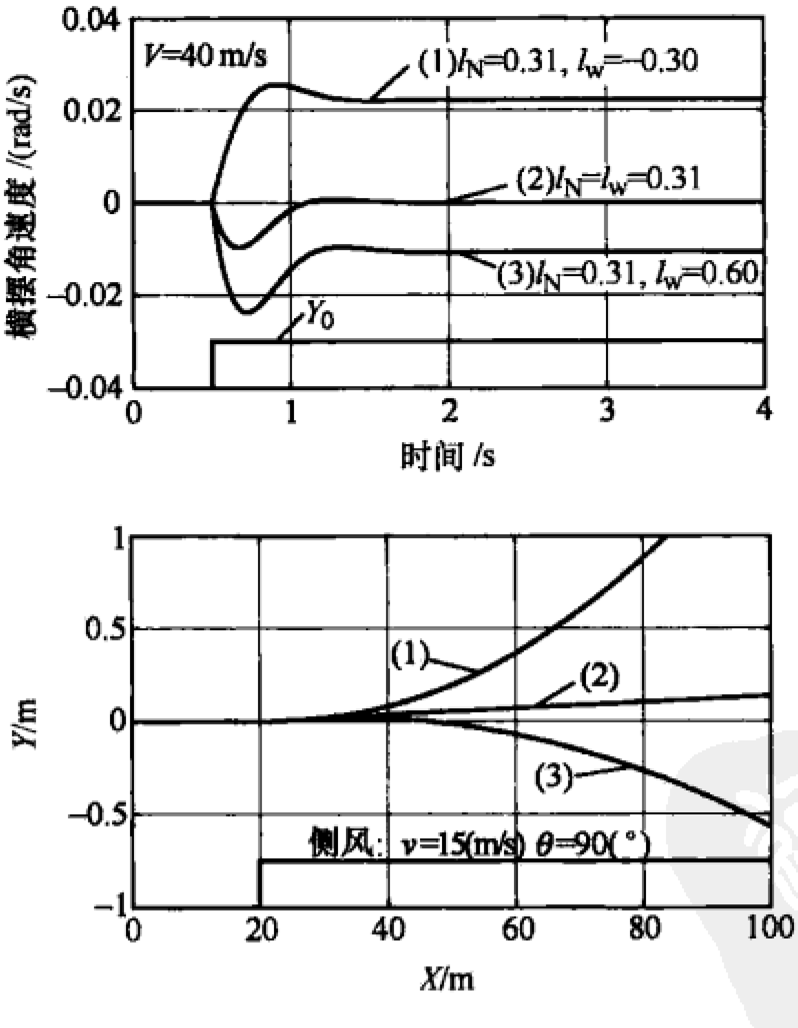


图 4.19　恒定速度侧风作用下车辆的运动

设侧向加速度的稳态值为 V_r，根据式(4.26)，每单位侧向风力引起的稳态侧向加速度值可表达如下：

$$S_w = \frac{V_r}{Y_{w0}} = \frac{(l_N - l_w)(K_f + K_r)V^2}{2l^2K_fK_r\left[1 - \frac{m(l_fK_f - l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]} \tag{4.27}$$

该值被称为侧风敏感系数，可以用作表征车辆对侧风干扰的敏感程度指标。

例题 4.2

试求车辆在恒定速度的侧风作用下，为保持其直线行驶所需的前轮转向角。并计算在该直线行驶过程中车辆的姿态角。

题解：

式(4.26)给出了侧风力作用下车辆的稳态横摆角速度响应，式(3.39)给出了车辆对转向输入的稳态横摆角速度响应。若两者之和为零，即可认为由侧风引起的车辆运动被前轮转向输入引起的横摆运动所抵消，即由以下方程描述车辆在侧风作用下直线行驶：

$$\frac{(l_N - l_w)(K_f + K_r)V}{2l^2K_fK_r\left[1 - \frac{m(l_fK_f - l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}Y_{w0} + \frac{1}{2l^2K_fK_r\left[1 - \frac{m(l_fK_f - l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}V^2\right]}\frac{V}{l}\delta_0 = 0 \tag{E4.4}$$

根据上述方程，求得转向角为

$$\delta_0 = \frac{l_w - l_N}{2l}\left(\frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_r}\right)Y_{w0} \tag{E4.5}$$

由此可知，要使车辆在侧风作用下维持直线行驶的路径，当 l_N 大于 l_w 时，需要给车辆施加抵抗侧风的反方向转向角；相反，当 l_N 小于 l_w 时，则需施加顺风的、与侧风方向相同的转向角。

对直线路径而言，车辆的姿态角与其侧偏角 β 是一回事。由于侧向风力全部由前、后轮胎力来平衡，则有

$$-2K_f(\beta - \delta_0) - 2K_r\beta + Y_{w0} = 0 \tag{E4.6}$$

将式(E4.5)代入上式，即求得车辆的姿态角为

$$\beta = \frac{(l_f + l_w)Y_{w0}}{2lK_r} = \frac{(l_f + l_w)Y_{w0}}{2(l_f + l_N)(K_f + K_r)} \tag{E4.7}$$

需要注意的是，求解过程中要用到一个关系式，即：$l_N = -(l_f K_f - l_r K_r)/(K_f + K_r)$。

4.3.3　由侧向阵风引起的车辆运动

下面，我们考虑车辆在受到短促的侧向阵风作用下的情况。其中车辆转向角固定为零，侧向风力 Y_w 如图 4.20 所示、并作用于车辆的空气动力学中心 AC。

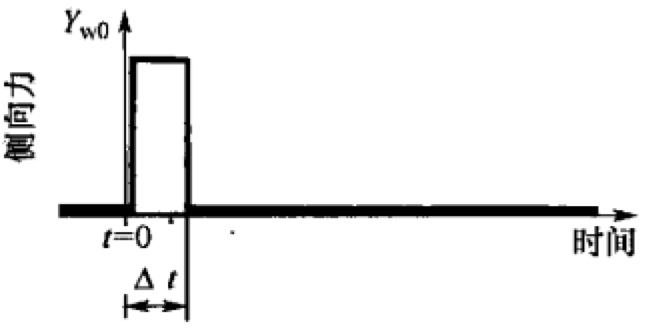


图 4.20　短促的侧向阵风引起的侧向力

与 4.2.2 小节一样，我们还是用固定于地面的绝对坐标系来描述车辆的运动。根据式(3.21)和式(3.22)，运动方程描述如下：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2(K_f+K_r)}{V}\frac{dy}{dt}+\frac{2(I_fK_f+l_rK_r)}{V}\frac{d\theta}{dt}-2(K_f+K_r)\theta=Y_w \tag{4.28}$$

$$\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}\frac{dy}{dt}+I\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\frac{d\theta}{dt}-2(l_fK_f-l_rK)\theta=-l_wY_w \tag{4.29}$$

如果 Δt 足够小时，仍像 4.2.2 小节一样，通过对式(4.28)、式(4.29)进行拉普拉斯变换，得到 $y(s)$ 和 $\theta(s)$ 分别如下：

$$y(s)=\frac{Y_{w0}\Delta t}{m}\frac{s^2+b_{y1}s+b_{y2}}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \tag{4.30}$$

$$\theta(s)=\frac{-l_wY_{w0}\Delta t}{I}\frac{s+b_r}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \tag{4.31}$$

其中，

$$b_{y1}=\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)-2l_w(l_fK_f-l_rK_r)}{IV}$$

$$=\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2l_Nl_w(K_f+K_r)}{IV}$$

$$b_{y2} = -\frac{2(l_f K_f - l_r K_r) + 2l_w (K_f + K_r)}{I} = \frac{2(l_N - l_w)(K_f + K_r)}{I}$$

$$b_r = \frac{2(l_w - l_N)(K_f + K_r)}{l_w m V}$$

由以上方程，可得稳态值如下：

$$\gamma = \pm\infty \text{（其中 } l_N \neq l_w\text{）}$$

$$= \frac{l_f^2 K_f + l_r^2 K_r}{2l^2 K_f K_r} V Y_{w0} \Delta t \text{（其中 } l_N = l_w\text{）} \tag{4.32}$$

$$\theta = \frac{(l_N - l_w)(K_f + K_r)V}{2l^2 K_f K_r\left[1 - \frac{m(l_f K_f - l_r K_r)}{2l^2 K_f K_r} V^2\right]} Y_{w0} \Delta t \tag{4.33}$$

假定当 $l_f K_f - l_r K_r > 0$ 时，$V < V_c$，车辆的稳态运动方程概括如下：

当 $l_N - l_w > 0$ 时，则 $\gamma = +\infty$，θ 为正的恒定值；

当 $l_N - l_w = 0$ 时，则 γ 为正的恒定值，$\theta = 0$；

当 $l_N - l_w < 0$ 时，则 $\gamma = -\infty$，θ 为负的恒定值。

车辆直线行驶并受到侧向阵风作用时，如果其 AC 在 NSP 之前，将转向背风面并顺风行驶；若 AC 与 NSP 碰巧重合，车辆将短时间逆风行驶，然后又回到其原有方向行驶；如果 AC 在 NSP 之后，车辆将短时间内漂移到逆风状态，然后转向迎风面并逆风行驶。

例题 4.3

采用 Matlab-Simulink 软件进行侧向阵风作用下的车辆运动仿真，其中风速为 25m/s，作用时间为 0.4s，车辆的行驶速度为 40m/s，车辆参数与例题 3.6 中相同；设车辆的 NSP 和 AC 的位置如图 4.19 所示。

题解：

风力可通过式(4.19)计算，其中 C_y 可以在 $S = 1.5\text{m}^2$、$\rho = 1.29\text{kg/m}^3$ 时，用图 4.16 来估计。结果得到：$Y_w = 2.07\text{kN}$。

车辆在侧向阵风作用下的运动方程由式(4.28)和式(4.29)描述，并重写为如下形式：

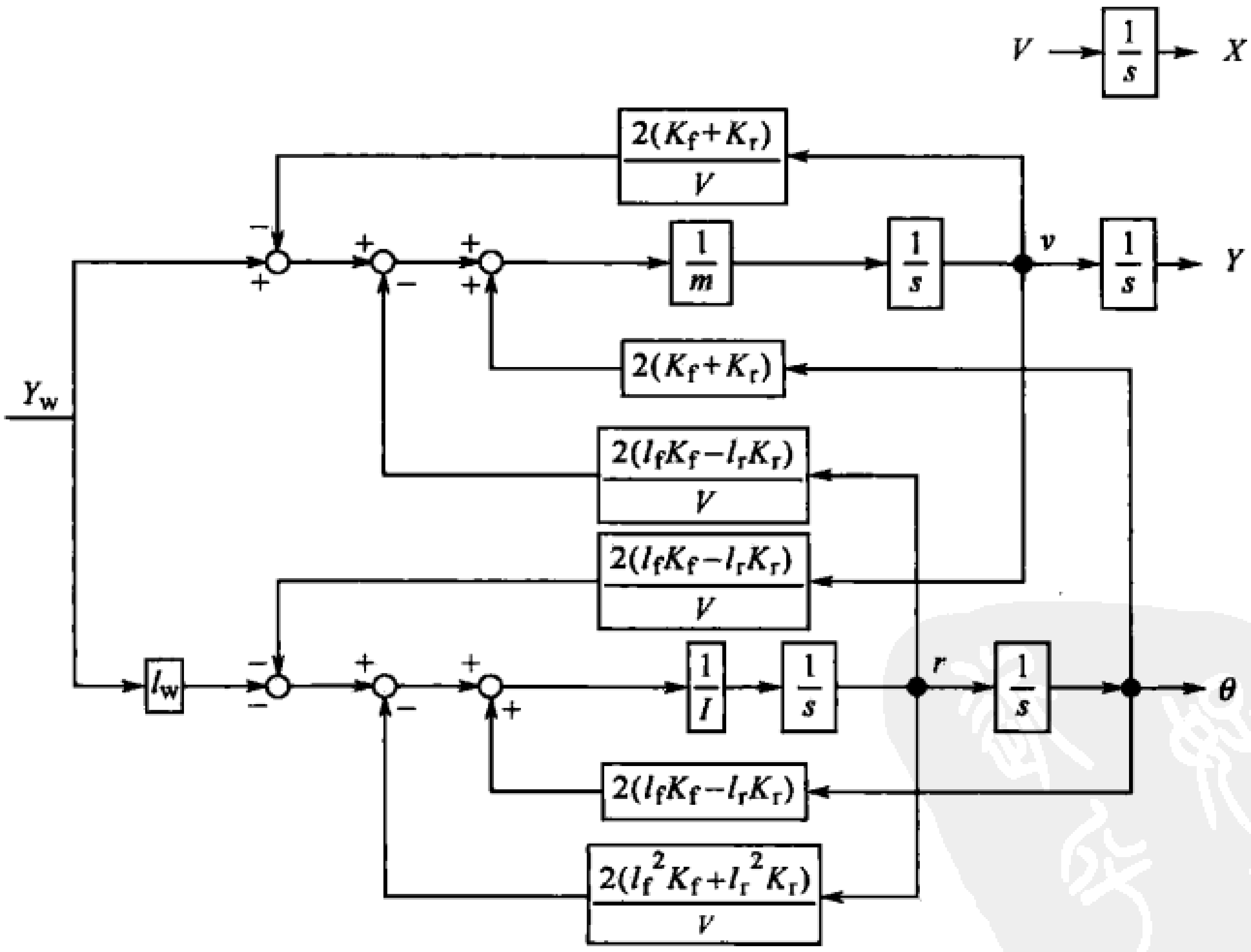
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2(K_f + K_r)}{mV}v - \frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{mV}r + \frac{2(K_f + K_r)}{m}\theta + \frac{Y_w}{m} \tag{4.28'}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{IV}v - \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{IV}r + \frac{2(l_f K_f - l_r K_r)}{I}\theta + \frac{l_w Y_w}{I} \tag{4.29'}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{E4.8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r \tag{E4.9}$$

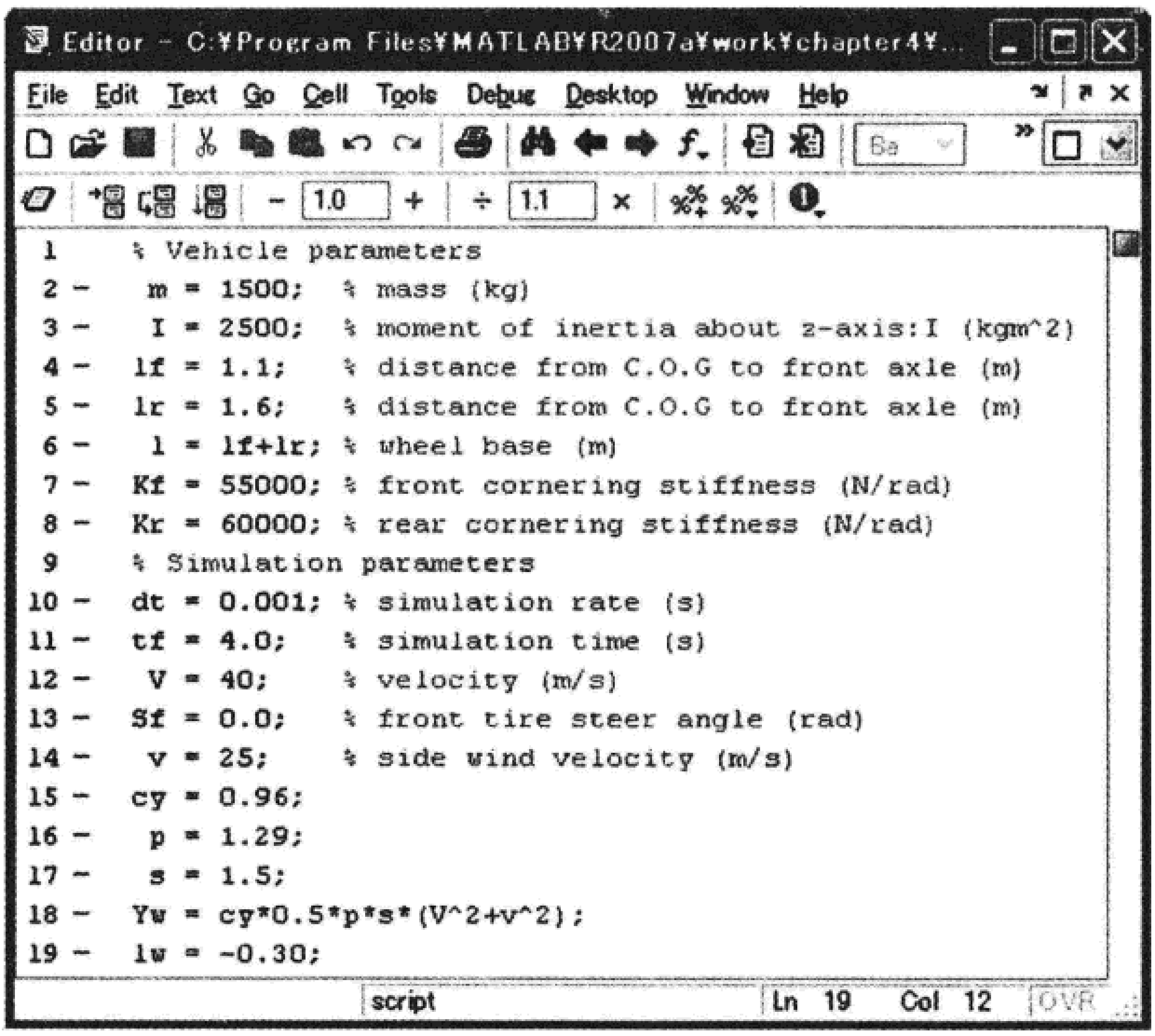
侧向阵风作用下的车辆运动可以用积分框图表达，如例题 4.3 图 a 所示。车辆参数的设置如例题 4.3 图 b 所示。根据建立的积分框图，得到的仿真程序如例题 4.3 图 c 所示。仿真结果如例题 4.3 图 d 所示。总结的结果如例题 4.3 图 e 所示。



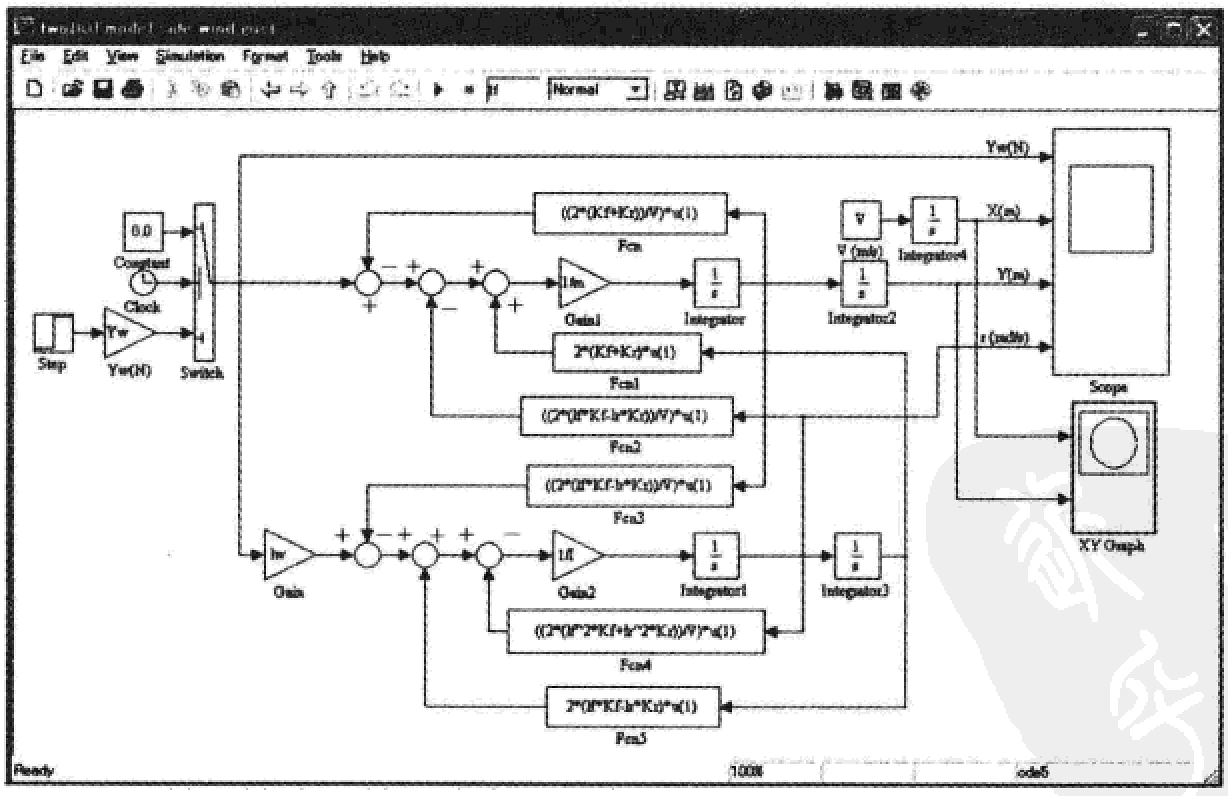
a)

例题 4.3 图　侧向阵风作用下的车辆运动仿真

a）积分框图

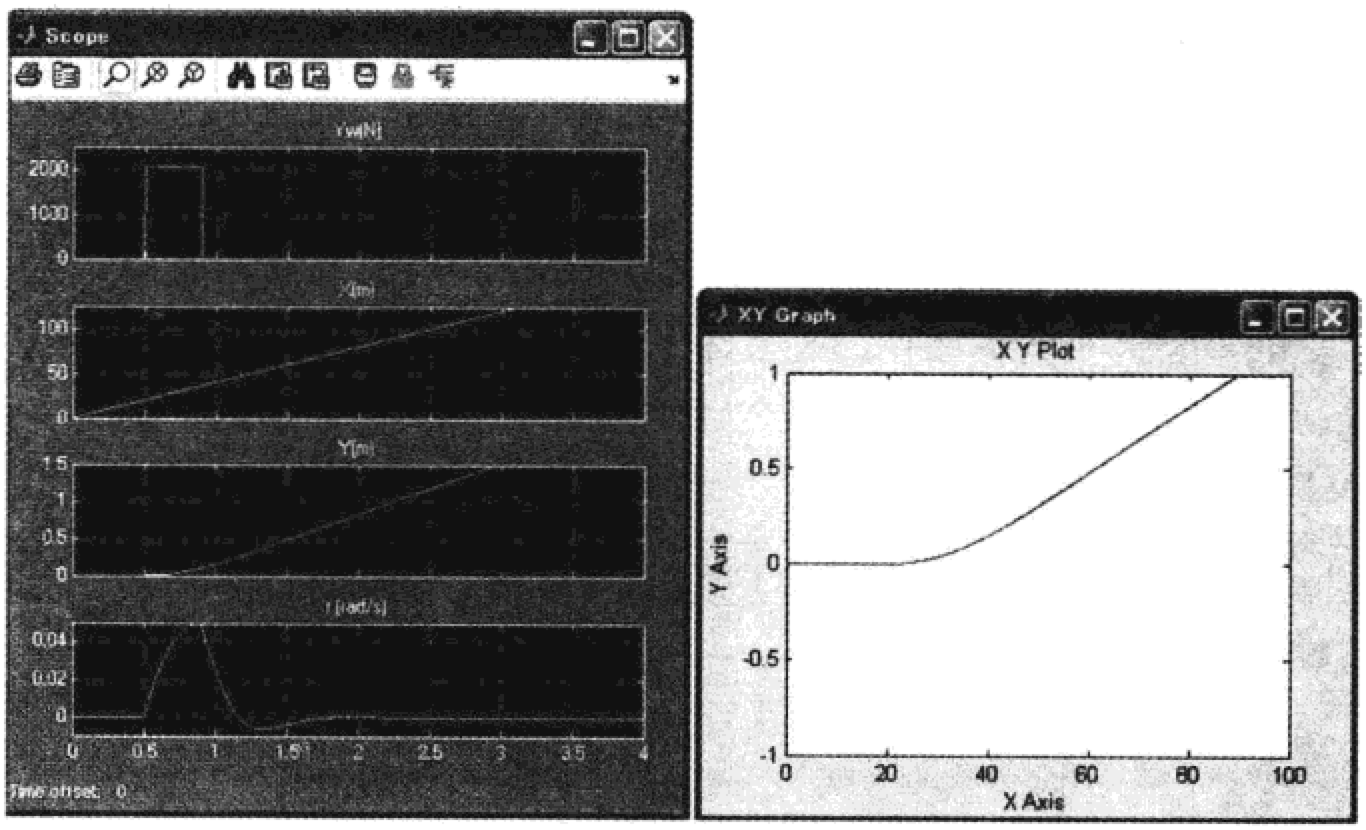


b)

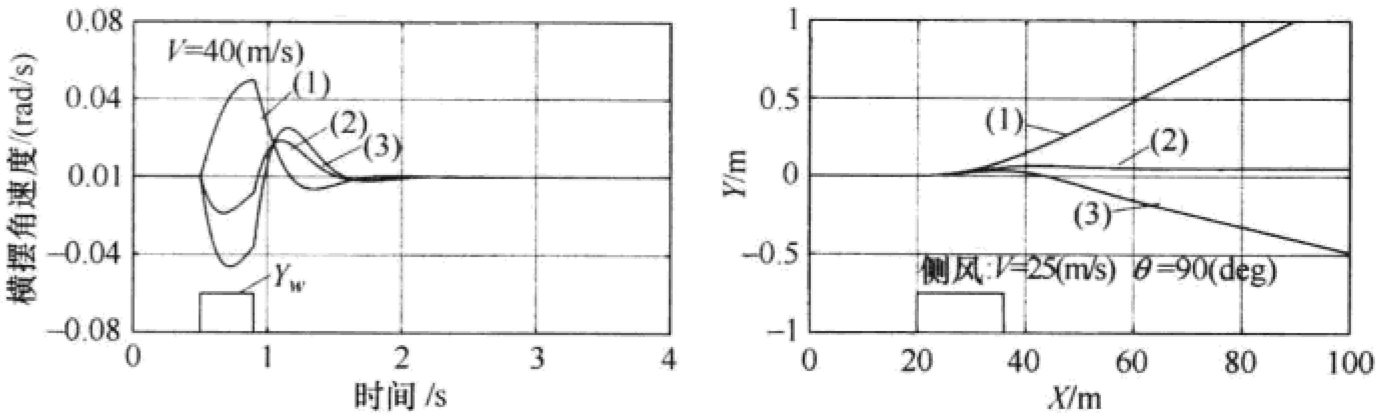


c)

例题 4.3 图　侧向阵风作用下的车辆运动仿真(续)
b）参数设置　c）仿真程序



d)



e)

例题 4.3 图　侧向阵风作用下的车辆运动仿真(续)

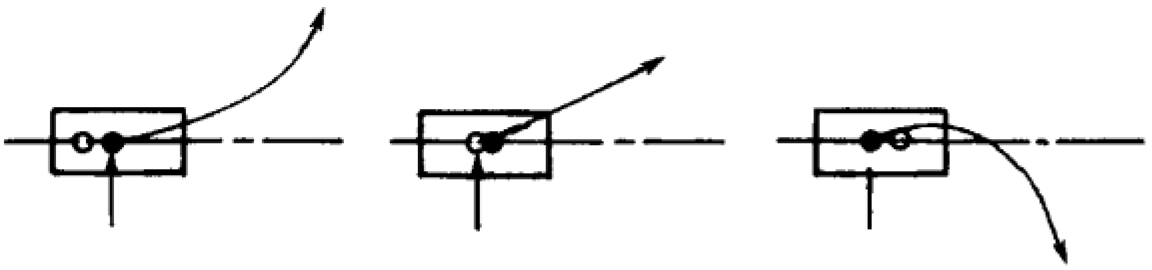
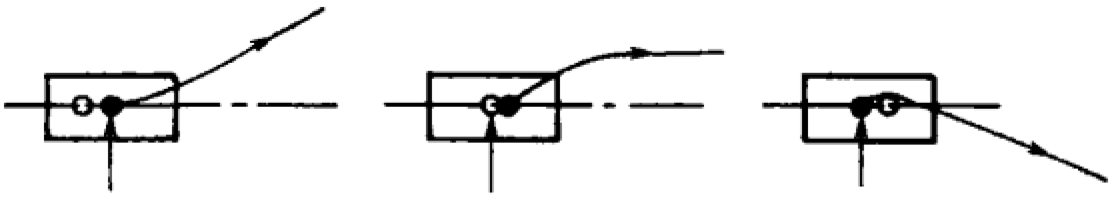
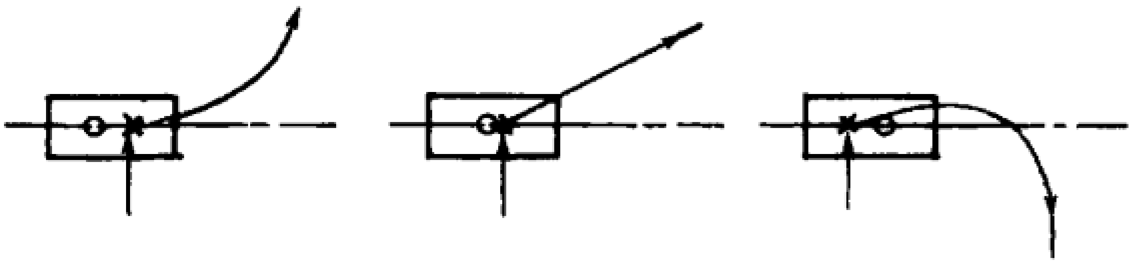
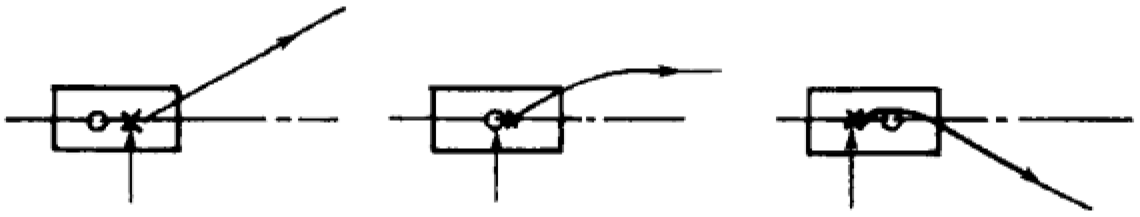
d) 仿真结果　e) 总结的结果

4.4　结论

车辆在外部侧向力作用下的运动响应主要取决于车辆质心 P 和中性转向点 NSP 的位置；而在侧向风作用下，车辆的运动很大程度上取决于中性转向点 NSP 和空气动力学中心 AC 的位置。

相关的内容概括在表 4.1 中。

表 4.1　受侧向干扰情况下车辆的运动

	Vehicle Trajectory
质心外受阶跃侧向力	
质心外受脉冲侧向力	
定风速侧风	
瞬时侧风	

注：●— CG；○— NSP；×— AC。

不论是哪种干扰，车辆可达到的横摆角速度不是与 $1/(2l^2K_fK_r)$ 成正比，就是与 $(K_f+K_r)/(2l^2K_fK_r)$ 成正比。具有大轮胎侧偏刚度和长轴距的车辆，通常对外部扰动较为不敏感，即对干扰表现得更鲁棒。

习题

4.1　设车辆参数与例题 3.3 中相同，行驶过程中车辆受到作用于质心的恒定侧向力 $Y_0=2.0\text{kN}$，试计算稳态的侧偏角和横摆角速

度，并绘出β-V和r-V的关系图。

4.2　试求习题4.1中的横摆角速度达到极值时相应的车速。

4.3　若车辆质心处受到恒定侧向力作用，试求使车辆保持直线行驶的转向角。

4.4　试求习题4.3中沿直线行驶时车辆的姿态角。

4.5　用Matlab-Simulink仿真车辆质心受到2.0kN的侧向力作用1.0s车辆的响应，比较这些响应对车速的影响，车辆参数与例题3.6相同。

4.6　若车辆以100km/h的速度行驶时受到10m/s的侧风作用，试计算受到的侧向力和横摆力矩。其中侧向力系数和横摆力矩系数参见图4.16，并已知$\rho=1.25\mathrm{kg/m^3}$，$l=2.7\mathrm{m}$，$S=1.5\mathrm{m^2}$。

4.7　试证明对AC点相对于CG点向后移动的车辆而言，为避免其受侧风作用时逆风行驶，需要车辆表现出更强的不足转向特性。

参考文献

[1]　W. Bergman, Bergman gives new meaning to under-steer and over-steer, SAE Journal, Vol. 73, No. 12, 1965.

[2]　H. Ichmura, Aerodynamic characteristics of passenger cars, JSAE Journal, Vol. 32, No. 4, 1978(In Japanese).

第 5 章　转向系与车辆动力学

5.1　引言

前面的章节中，我们所研究的车辆运动是以其前轮转向角被固定在某一特定值为前提条件的。现实中，前轮转向角由转向盘所控制，其大小不能直接给定。我们将包括从前轮至转向盘所有部分的这一机构，称为转向系。在本章中，我们将研究转向系的特性对车辆动力学性能的影响。为此，我们首先需要推导转向系的运动方程；然后，以此来考察由车辆运动引起的转向系特性。对正常行驶条件下的车辆而言，其转向盘由驾驶人的手臂控制。因此，我们对驾驶人手臂的作用也进行了理论上的研究。

5.2　转向系模型与运动方程

普通车辆的转向系结构如图 5.1 所示。其中，转向盘的转动通过转向轴及转向器传递给横拉杆，再通过转向节臂，使得前轮绕主销转动。

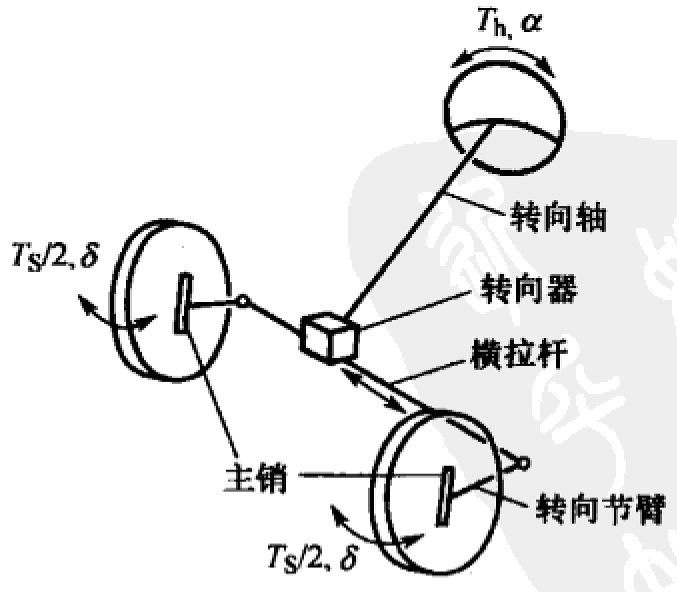


图 5.1　车辆的转向系

如果将所有转向系的运动全部换算成绕主销的转动，则可得到一个等效的转向系模型，如图 5.2 所示。

一个具有转动惯量 I_h 的旋转刚体（等效为转向盘），通过弹性系数为 K_s 的旋转轴

（等效为转向轴和转向器）与转动惯量为 I_s 的另一旋转刚体（等效为两个前轮）相连。其中，I_h、I_s 和 K_s 为绕主销的等效惯量和等效弹性系数。同时，考虑到转向轴和主销存在的阻尼摩擦，我们分别定义其为阻尼系数 C_h 和 C_s。将换算到主销的转向盘转角定义为 α，前轮转角定义为 δ，则上述等效模型简化成为一个两自由度的扭转振动系统。这里的 I_s 和 C_s 均为左、右两轮之和。

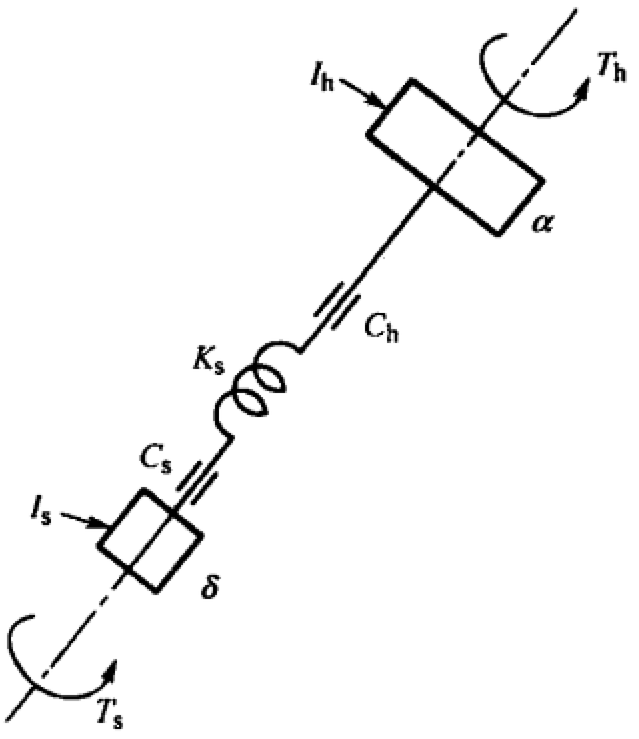


图 5.2　转向系等效模型

由驾驶人手臂施加于转向盘的力矩 T_h 可以看成外力。另一方面，当车辆正以某转向盘转角行驶时，将会有一个使得转向盘恢复原位的力矩作用。原因是作用于车辆前轮胎的侧向力产生了一个绕主销的力矩，它也是转向系必须要考虑的外力矩。如第 2 章所述，前轮侧向力的作用点稍位于接地印迹中心线的后方。前轮主销轴的延长线与地面的交点，通常会位于接地印迹中心线的前方，如图 5.3 所示。

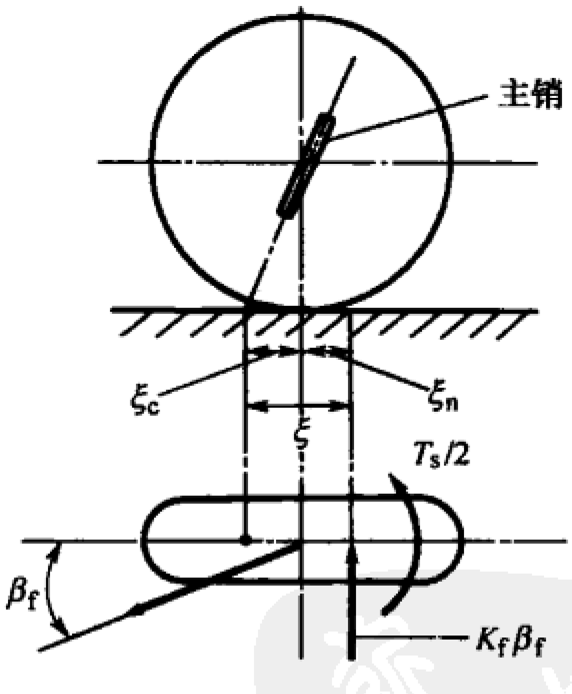


图 5.3　作用于前轮的回正力矩

如图所示，若前轮产生逆时针方向的侧偏角 β_f，则侧向力将绕主销产生一个逆时针方向的力矩。若前轮轮胎的侧偏刚度为 K_f，则绕主销作用于轮胎的力矩 $T_s/2$ 为

$$\frac{T_s}{2} = (\xi_n + \xi_c) K_f \beta_f = \xi K_f \beta_f \tag{5.1}$$

式中，$\xi = \xi_n + \xi_c$，ξ_n 称为轮胎拖距，ξ_c 称为主销后倾拖距；$2\xi K$ 为

转向系的复位力矩系数。

如果前轮侧偏角 β_f 可以如第 3 章中用车辆运动参数表示为$\beta_f = \beta + l_f r/V - \delta$，则力矩 T_s 可表示为

$$T_s = 2\xi K_f\left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta\right) \tag{5.2}$$

该力矩即为作用于转向系前轮的外力矩。

综上所述，换算到主销的转向盘转动可表示为

$$I_h\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\right) + C_h\frac{d\alpha}{dt} + K_s(\alpha - \delta) = T_h \tag{5.3}$$

类似地，前轮绕主销的转动为

$$I_s\left(\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\right) + C_s\frac{d\delta}{dt} - K_s(\alpha - \delta) = 2\xi K_f\left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta\right) \tag{5.4}$$

式(5.3)和式(5.4)含有 dr/dt 的原因是，由于转向机构是固定于车辆上的，其中的 α 和 δ 分别是转向盘和前轮相对于车辆的转角，而车辆可能存在横摆运动，因此转向盘和前轮相对于绝对空间的角加速度分别为 $d^2\alpha/dt^2 + dr/dt$ 和 $d^2\delta/dt^2 + dr/dt$。而在正常的车辆运动中，可认为 $d^2\alpha/dt^2 \gg dr/dt$，$d^2\delta/dt^2 \gg dr/dt$。因此，以上转向系的运动方程可以简化为如下形式：

$$I_h\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C_h\frac{d\alpha}{dt} + K_s(\alpha - \delta) = T_h \tag{5.5}$$

$$I_s\frac{d^2\delta}{dt^2} + C_s\frac{d\delta}{dt} + K_s(\delta - \alpha) = 2\xi K_f\left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta\right) \tag{5.6}$$

5.3 转向系特性对车辆运动的影响

5.3.1 固定转向盘转角时转向系特性对车辆运动的影响

由上一小节可知，转向系可看成具有 α 和 δ 的两自由度的动力学系统。本小节的研究中，在假定 α 不是运动状态变量、而是预先给定的任意固定值的情况下，我们来研究转向系特性对车辆运动的影响。实际中，这样的场合可能发生在有意地将转向盘固定于某固定角

度，而不管车辆的运动状况如何；或者按照某一既定的变化规律操纵转向盘，而不管转向盘惯性、阻尼力、复位力如何。如前面几章中所提到的，前轮转向角总是被固定为任意的一个恒定值。当前轮转向角或转向盘转角被固定的状态，我们称其为固定操纵。

这里，α 不再是运动状态变量，因而式(5.5)也就失去意义了。此时的转向系运动可以用式(5.6)表示如下：

$$I_s\frac{d^2\delta}{dt^2}+C_s\frac{d\delta}{dt}+K_s(\delta-\alpha)=2\xi K_f\left(\beta+\frac{l_f r}{V}-\delta\right) \tag{5.6}$$

其中，α 不是一个变量，而是作为一个已知的输入。对于已知的 α，前轮转向角 δ 可通过式(5.6)获得。而关于 δ 的运动方程已经在第 3 章中进行了推导，故有

$$mV\frac{d\beta}{dt}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\delta \tag{3.12}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{dr}{dt}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \tag{3.13}$$

将式(5.6)、式(3.12)和式(3.13)联立，便得到了考虑转向系、关于转向盘转角 α 的车辆运动方程组。

为研究转向系静态特性的影响，我们可以将转向盘转角固定，或者忽略转向盘的迅速转动的过程，也就是说，此时的 $d^2\delta/dt^2$ 和 $d\delta/dt$ 很小。而且 I_s 和 C_s 也很小，于是，式(5.6)中的 $I_s(d^2\delta/dt^2)$ 和 $C_s(d\delta/dt)$ 可忽略。因此，前轮转角可用下式确定：

$$K_s(\delta-\alpha)=2\xi K_f\left(\beta+\frac{l_f r}{V}-\delta\right) \tag{5.7}$$

求解可得 δ 如下：

$$\delta=\frac{K_s}{K_s+2\xi K_f}\alpha+\left(1-\frac{K_s}{K_s+2\xi K_f}\right)\left(\beta+\frac{l_f r}{V}\right)$$

记作：

$$e=\frac{K_s}{K_s+2\xi K_f}\alpha=\frac{1}{1+\dfrac{2\xi K_f}{K_s}} \tag{5.8}$$

$$\delta=e\alpha+(1-e)\left(\beta+\frac{l_f}{V}r\right) \tag{5.9}$$

并将δ代入式(3.12)和式(3.13)，整理后得：

$$mV\frac{d\beta}{dt}+2(eK_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_feK_f-l_rK_r)\right]r=2eK_f\alpha \quad (5.10)$$

$$2(l_feK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{dr}{dt}+\frac{2(l_f^2eK_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_feK_f\alpha \quad (5.11)$$

式(5.10)和式(5.11)表达了当考虑转向系静态特性时车辆相应于α的运动方程。将其与式(3.12)和式(3.13)比较可知，式(5.10)和式(5.11)恰好使用eK_f替换了式(3.12)和式(3.13)中前轮侧偏刚度K_f的结果。也就是说，车辆对转向盘转角α的响应特性与不考虑转向系的影响、且轮胎侧偏刚度为eK_f的车辆响应特性是一样的。由式(5.8)可知，e的值小于1意味着前轮侧偏刚度的下降。转向系的复位力矩系数越大，转向系的刚度越小，将会越加促进这一作用更明显。而前轮侧偏刚度变小，会使车辆的转向特性向不足转向趋势变化，车辆会表现出更多的US特性。的确如此，转向系的回正力矩系数越大，转向系的刚度越小，车辆的US特性越强，方向稳定性越好。

实际上，将前轮转角固定在一预先设定的值并不容易。在考虑转向系回正力矩系数和刚度的情况下，即使在理论上呈现为OS趋势的车辆，有可能实际上表现为US特性。也就是说，实际上车辆转向特性不仅取决于轮胎特性和前、后轮的位置，还在很大程度上依赖于转向系。我们将由转向系回正力矩T_s产生的前轮转向角$\alpha-\delta$称为转向系的变形转向。

例题5.1

计算变形转向导致的轮胎等效侧偏刚度的减小量。其中侧偏刚度$K_f=80\text{kN/rad}$，轮胎拖距+主销后倾距$\xi=0.035\text{m}$，转向系刚度$K_s=10.0\text{kN}\cdot\text{m/rad}$。同时验证该减小量对某车辆转向特性的影响。该车的$m=1500\text{kg}$，$l_f=1.1$，$l_f=1.6$，$K_r=60.0\text{kN/rad}$。

题解：

根据式(5.8)可得：

$$e=\frac{1}{1+\frac{2\xi K_f}{K_s}}=\frac{1}{1+\frac{2.0\times0.035\times80000}{10000}}=0.64$$

所以前轮的等效侧偏刚度为 0.64 ×80.0kN/rad = 51.0kN/rad。

根据式(3.43)，考虑变形转向后的稳定因子为

$$A=-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}=-\frac{1500}{2\times2.7^2}\times\frac{1.1\times51000-1.6\times60000}{51000\times60000}=0.00134$$

而不考虑变形转向的稳定因子为：

$$A=-\frac{m}{2l^2}\frac{l_fK_f-l_rK_r}{K_fK_r}=-\frac{1500}{2\times2.7^2}\times\frac{1.1\times80000-1.6\times60000}{80000\times60000}=0.00017$$

正如例题 5.1 表明，变形转向在减少前轮等效侧偏刚度、改变车辆的转向特向方面有着重大的影响，认识到这一点是非常重要的。系数 e 的取值一般为 0.5 ~0.7，这就是说当轮胎被安装到前轮以后，它的等效侧偏刚度只有原来的 50% ~70%。本书在使用符号 K_f 来表示前轮侧偏刚度时，已经包含了变形转向的影响，另需说明的除外。

在前面的研究中，为了便于研究转向系静态特性的影响，我们不是以固定 α、就是以防止转向盘转向角突变为条件，因而式(5.6)中的 $I_s(\mathrm{d}^2\delta/\mathrm{d}t^2)$ 和 $C_s(\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t)$ 项可以忽略。而严格地来讲，当转向盘被更快地操作时，这些项不能被忽略。这时，通过对式(5.6)、式(3.12)和式(3.13)稍加变形，便可以得到相应于 α 的车辆运动方程如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r-2K_f\delta=0 \tag{5.12}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r-2l_fK_f\delta=0 \tag{5.13}$$

$$-2\xi K_f\beta-\frac{2l_f\xi K_f}{V}r+I_s\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}+C_s\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}+(K_s+2\xi K_f)\delta=K_s\alpha \tag{5.14}$$

根据这些方程可以预见，绕主销的前轮惯性项和阻尼项会使前轮转向角 δ 相对于 α 的响应产生延迟，从而车辆对转向盘转角的响应也会延迟。在转向系的刚度和回正力矩系数较低的情况下，这种效应会更加明显。图 5.4 给出的一个实例是不同转向系刚度情况下，对周期性转向盘转角 α 的车辆横摆角速度响应 r。由式(5.12) ~式(5.14)可知，

随着转向系刚度的减小，车辆对转向盘转角的运动响应延迟将变大。

前面的讨论表明，转向系刚度越小，车辆就越倾向于不足转向特性。第3章中，我们曾经讨论过具有US特性的车辆如何有较小的响应延迟。然而，对具有低转向系刚度的US特性车辆而言，其对转向角的延迟会更大，特别是在前轮惯性和阻尼摩擦不可忽略的场合。因此，过度地减小转向系刚度并非总是期望的。而对回正力矩系数而言，其值越大，车辆的US特性越强。式(5.12)～式(5.14)表明，较大的回正力矩系数并不会引起任何对转向角响应延迟。因此，转向系的回正力矩系数 $2\xi K_f$ 在转向盘操纵力不至于过大的范围内最好尽可能大。

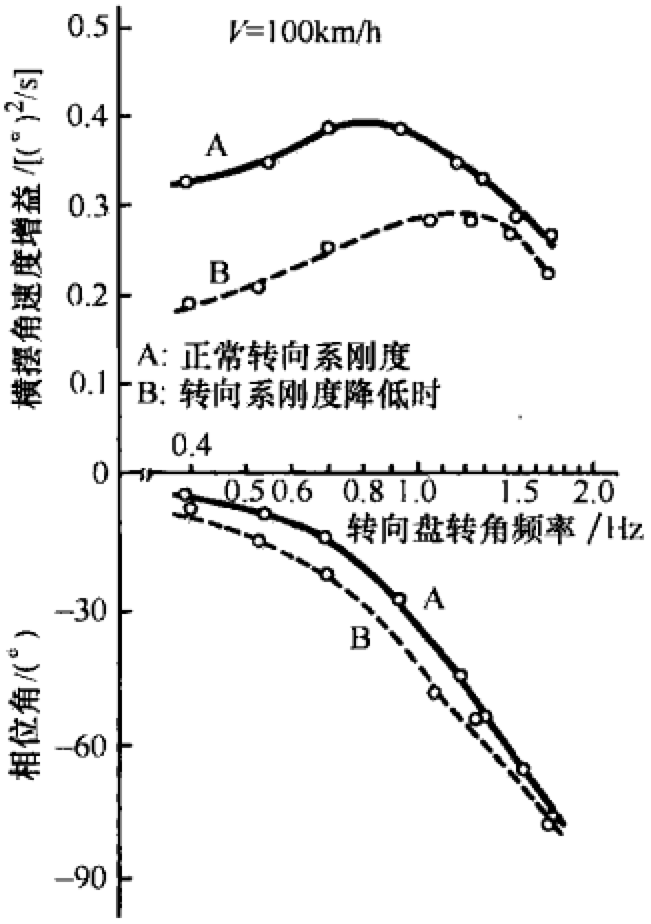


图 5.4 转向系刚度的影响

例题 5.2

3.4.4 小节表明，通过采用增加侧向加速的办法来减小等效的轮胎侧偏刚度，可以分析轮胎在非线性区的车辆动力学。然而，在本小节中，只涉及了轮胎对侧偏角的饱和特性，却完全没有考虑轮胎侧偏角增加会减小轮胎拖距这一事实。当轮胎拖距随着侧偏角(意味着侧向加速度)增大而减小时，回正力矩也随之减小，变形转向也随之变小，这对由变形转向引起的侧偏刚度损失有影响。

参考2.3.3和3.4.4小节，轮胎拖距 ξ' 会随着侧偏角成比例减小，并在侧向加速度的饱和点处趋近于零。于是有如下方程：

$$\xi' = \xi\left(1 - \frac{K_f}{\mu_{r/1}^{1} W}\beta_f\right) \tag{E5.1}$$

考虑转向系的变形转向，试求前轮胎在大侧偏角情况下的等效侧偏

刚度。

题解：

式(3.101)对轮胎拖距 ξ'提示出了如下的描述：

$$\xi' = \xi\left(1 - \frac{K_f}{\mu_{r/1}^{1} W}\beta_f\right) = \xi\sqrt{1 - \frac{\ddot{y}}{\mu}} \tag{E5.2}$$

并且，在大侧偏角的情况下，前轮轮胎的侧偏刚度 K_f' 可描述如下：

$$K_f' = K_f\sqrt{1 - \frac{\ddot{y}}{\mu}} \tag{E5.3}$$

与式(5.8)相比较，大侧偏角下，减小的侧偏刚度系数 e'为

$$e' = \frac{1}{1 + \dfrac{2\xi' K_f'}{K_s}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2\xi K_f}{K_s}\left(1 - \dfrac{\ddot{y}}{\mu}\right)} = \frac{e}{1 - (1 - e)\dfrac{\ddot{y}}{\mu}} \tag{E5.4}$$

由上可知，在考虑了变形转向后，大侧偏角下的等效侧偏刚度为

$$e' K_f' = \frac{e}{1 - (1 - e)\dfrac{\ddot{y}}{\mu}} K_f\sqrt{1 - \frac{\ddot{y}}{\mu}} \approx e K_f\left[1 - \left(e - \frac{1}{2}\right)\frac{\ddot{y}}{\mu}\right] \tag{E5.5}$$

显然，由于上式中的侧偏角(实际上是侧向加速度)的缘故，将式(3.101)与式(3.102)或式(3.103)与式(3.104)相比较可知，侧偏刚度的下降率减小了。这说明等效侧偏刚度因侧偏角而减小的影响在后轮上更为明显，尤其是在大轮胎侧偏角的情况下。可以看到一个有意思的现象，即变形转向在使车辆偏向不足转向特性的同时，也会在大侧偏角的情况下使车辆偏向过度转向特性。结果是弱化了变形转向在大侧偏角的情况下，对前轮轮胎侧偏刚度的影响。

5.3.2　非固定转向盘转角时转向系特性对车辆运动的影响

上小节中，我们在假设转向盘转角固定为一给定值的情况下，研究了转向系特性对车辆运动的影响。本小节我们将研究转向盘转角 α 不是预先给定、而是作为一个具有运动自由度的状态变量的情况下，转向系特性对车辆运动的影响。现实中对应的典型情况是驾驶人在车

辆行驶中完全从转向盘撒手，或者是驾驶人给转向盘施加某一力矩而不管转向盘转角如何的情况。我们将这种情况称为自由控制。

自由控制下，车辆及转向系的运动方程推导如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\delta \quad (3.12)$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \quad (3.13)$$

$$I_h\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}+C_h\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}+K_s(\alpha-\delta)=T_h \quad (5.5)$$

$$I_s\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}+C_s\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}+K_s(\delta-\alpha)=2\xi K_f\left(\beta+\frac{l_fr}{V}-\delta\right) \quad (5.6)$$

其中，相对转向盘的转动惯量 I_h 而言，前轮绕主销的力矩 I_s 很小，因而可以忽略不计。并且，阻尼系数 C_h、C_s 也很小，因而也可以忽略不计。因此，式(5.5)和式(5.6)简化为如下形式：

$$I_h\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}+K_s(\alpha-\delta)=T_h \quad (5.5')$$

$$K_s(\delta-\alpha)=2\xi K_f\left(\beta+\frac{l_fr}{V}-\delta\right) \quad (5.6')$$

将式(5.6′)代入式(5.5′)，得：

$$I_h\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}-2\xi K_f\left(\beta+\frac{l_fr}{V}-\delta\right)=T_h \quad (5.5'')$$

这里，式(5.6)′和式(5.7)相同，由此求得的 δ 与式(5.9)相同，即：

$$\delta=e\alpha+(1-e)\left(\beta+\frac{l_f}{V}r\right)$$

假设转向系的刚度非常大(即 $K_s=\infty$)，则由式(5.8)得 $e=1$，且有：

$$\delta=\alpha \quad (5.6'')$$

根据式(3.12)、式(3.13)、式(5.5″)和式(5.6″)，可得到自由控制下、包含转向系的、简化的车辆运动方程，即：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r-2K_f\alpha=0 \quad (5.15)$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r-2l_fK_f\alpha=0 \tag{5.16}$$

$$-2\xi K_f\beta-\frac{2l_f\xi K_f}{V}r+I_h\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}+2\xi K_f\alpha=T_h \tag{5.17}$$

为了进一步简化分析，以研究转向系特性对车辆运动的影响，进行如下假设：

$$K_f=K_r=K$$

$$l_f=l_r=\frac{l}{2}$$

$$I=mk^2=ml_fl_r=m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

将以上等式代入式(5.15)～式(5.17)，有

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+4K\beta+mVr-2K\alpha=0 \tag{5.15'}$$

$$m\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{l^2K}{V}r-lK\alpha=0 \tag{5.16'}$$

$$-\frac{2\xi K_f}{I_h}\beta-\frac{\xi lK_f}{I_hV}r+\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}+\omega_s^2\alpha=\frac{T_h}{I_h} \tag{5.17'}$$

其中，

$$\omega_s^2=\frac{2\xi K_f}{I_h}=\frac{2\xi K}{I_h} \tag{5.18}$$

式中，ω_s 为转向系的固有频率。

对简化的式(5.15′)、式(5.16′)、式(5.17′)进行拉普拉斯变换，得特征方程为

$$\frac{4}{m^2l^2V}\begin{vmatrix} mVs & mV & -2K \\ 0 & m\left(\frac{l}{2}\right)^2s+\frac{l^2K}{V} & -lK \\ -\omega_s^2 & -\frac{l\omega_s^2}{2} & s^2+\omega_s^2 \end{vmatrix} \tag{5.19}$$

$$=A_4s^4+A_3s^3+A_2s^2+A_1s+A_0$$

其中，

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{4K}{ml}\omega_s^2 \\
A_1 &= \frac{4K}{mV}\omega_s^2 \\
A_2 &= \omega_s^2 + \frac{16K^2}{m^2V^2} \\
A_3 &= \frac{8K}{mV} \\
A_4 &= 1
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

为了使运动稳定，特征方程(5.19)的系数必须满足下面的劳斯(Routh)判据，如下：

$$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 > 0 \tag{5.21}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & A_4 & A_3 \end{vmatrix} = A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4 > 0 \tag{5.22}$$

根据式(5.18)可知，当 $\xi > 0$ 时，A_0、A_1 为正，且 A_2、A_3、A_4 恒为正。因此，要使车辆运动稳定，拖距 ξ 必须为正。

将式(5.20)代入式(5.22)并整理，得：

$$\frac{32K^2}{m^2V^2} + \omega_s^2 - \frac{16K}{ml} > 0 \tag{5.23}$$

根据上述条件，以使其与车速 V 无关，则应有

$$\omega_s^2 - \frac{16K}{ml} > 0 \tag{5.24}$$

在此，对其变形如下：

$$\omega_y^2 = \frac{16K}{ml} = \frac{4lK}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2} \tag{5.25}$$

式(5.25)右边的分母相当于车辆的横摆转动惯量；分子相当于前、后轮胎的侧偏刚度总和，等效于前、后轮胎的侧偏刚度(即侧向刚度)引起的单位横摆角产生的力矩。因此，ω_y 是一个车辆常数，可以看成是横摆固有频率。以 ω_y 改写式(5.24)，可得：

$$\omega_s^2 - \omega_y^2 > 0 \tag{5.26}$$

因此，当车辆处于自由控制状态时，要使其能够在任意车速下都保证运动稳定，转向系的固有频率 ω_s 必须大于式(5.25)所定义的车辆横摆固有频率 ω_y。

如果 $\omega_s < \omega_y$，则存在车辆运动从稳定到不稳定的稳定极限速度 V_{cr}。令式(5.23)左边为零，可求得稳定极限速度为

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2lK}{m}\frac{1}{1-(\omega_s/\omega_y)^2}} \tag{5.27}$$

当行驶速度 V 小于 V_{cr}时，车辆运动稳定；而当 V 大于 V_{cr}时，则不稳定。

从式(5.18)可知，ω_s 随 ξ 的变化而显著变化。以式(2.27)试算了一个普通轿车的 ξ 与其稳定极限速度的关系，结果如图 5.5 所示。

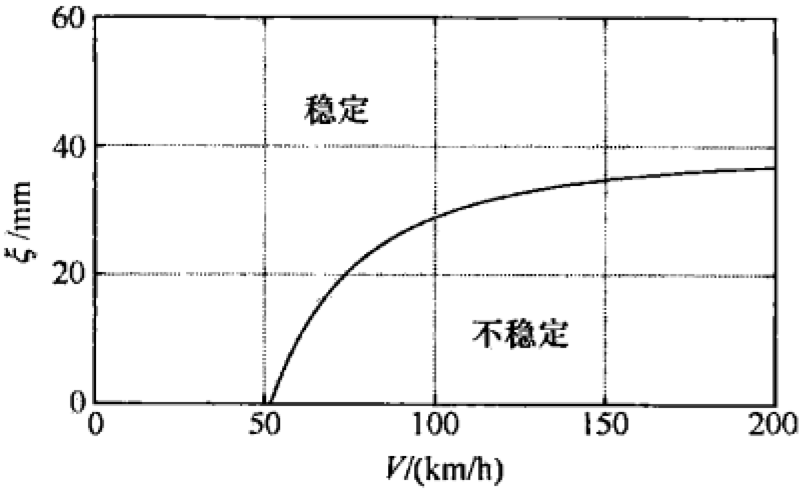


图 5.5　稳定极限速度与 ξ 的关系

根据上述的分析已经清楚了，ξ 在较小转向力矩范围内应尽可能大，转向系的 ω_s 也应该尽可能大，而 I_h 越小越好。此外，K_s 越大，ω_s 也越大。

5.3.3　驾驶人手臂的作用

在前面的章节中，我们讨论了转向盘转角完全固定及转向盘完全松开时，转向系特性对车辆运动的影响。但对实际中的车辆而言，即使驾驶人无意主动操纵车辆，其手臂也是轻放在转向盘上。此时，转向盘既没有完全固定，也不是完全松开。

于是，在一些简单的假设前提下，我们研究驾驶人手臂对车辆运

动的影响。我们假设，驾驶人无意主动控制车辆(有关驾驶人主动控制的内容详见第9章)

设驾驶人的手臂搭在转向盘上，其手臂假定起着一个手臂等效弹簧的作用。设由手臂给予的转向盘转角为 α_h，真正的转向盘转角为 α，则驾驶人手臂作用于转向盘的力矩 T_h 为：

$$T_h = K_h(\alpha_h - \alpha) \tag{5.28}$$

式中，K_h 为驾驶人手臂的等效弹簧常数。

如同5.3.2小节中的处理方法简化转向系，并将式(5.28)代入式(5.27)中，则包括手臂作用的车辆及转向盘的运动方程可由下式表示：

$$mV\frac{d\beta}{dt} + 2(K_f + K_r)\beta + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r)\right]r - 2K_f\alpha = 0 \tag{5.15}$$

$$2(l_f K_f - l_r K_r)\beta + I\frac{dr}{dt} + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V}r - 2l_f K_f\alpha = 0 \tag{5.16}$$

$$-2\xi K_f\beta - \frac{2l_f\xi K_f}{V}r + I_h\frac{d^2\alpha}{dt^2} + (2\xi K_f + K_h)\alpha = K_h\alpha_h \tag{5.29}$$

根据式(5.29)，转向系的固有频率变为

$$\omega_s = \sqrt{\frac{2\xi K_f + K_h}{I_h}} \tag{5.30}$$

因此，手臂具有增大转向系固有频率 ω_s 的作用。在5.3.2小节中已经表明，要使车辆运动稳定，期望 ω_s 越大越好。从这一点来看，期望 K_h 越大越好。

对转向系转动惯量可以忽略的车辆运动而言，式(5.29)简化为

$$-2\xi K_f\beta - \frac{2l_f\xi K_f}{V}r + (2\xi K_f + K_h)\alpha = K_h\alpha_h \tag{5.31}$$

根据式(5.31)，求得：

$$\alpha = \frac{K_h}{K_h + 2\xi K_f}\alpha_h + \left(1 - \frac{K_h}{K_h + 2\xi K_f}\right)\left(\beta + \frac{l_f}{V}r\right)$$

若记：

$$e_h = \frac{K_h}{K_h + 2\xi K_f} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi K_f}{K_h}} \tag{5.32}$$

则有

$$\alpha = e_h \alpha_h + (1 - e_h)\left(\beta + \frac{l_f}{V} r\right) \tag{5.33}$$

将式(5.33)代入式(5.15)和式(5.16)，并整理得：

$$mV\frac{d\beta}{dt} + 2(e_h K_f + K_r)\beta + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f e_h K_f - l_r K_r)\right]r = 2e_h K_f \alpha_h \tag{5.34}$$

$$2(e_h l_f K_f - l_r K_r)\beta + I\frac{dr}{dt} + \frac{2(l_f^2 e_h K_f + l_r^2 K_r)}{V} r = 2l_f e_h K_f \alpha_h \tag{5.35}$$

将其与原来的式(5.15)、式(5.16)相比可知，前轮侧偏刚度又从 K_f 变成了 $e_h K_f$。换而言之，当考虑驾驶人手臂的作用时，由于 e_h 小于 1，相当于前轮侧偏刚度减小了。前轮侧偏刚度减小得越多，则车辆的不足转向特性就变得越强，方向稳定性就越好。从这一点来看，e_h 越小越好，即 K_h 越小越好。

从车辆稳定性的角度来看，对于 K_h 有两个相互矛盾的要求。这一论点与实际情况是相符合的。在实际高速驾驶时，驾驶人既不紧握(即 K_h 大时)乃至于完全固定转向盘、也不完全撒手(即 K_h 小时)使转向盘处于自由状态，而是以适当轻的力度握住转向盘。

因此，可以这样说，驾驶人的手臂轻握转向盘，可使车辆运动更加稳定。

习题

5.1　试根据式(5.9)、式(3.12)和式(3.13)推导出式(5.10)和式(5.11)，以更好地理解变形转向对前轮侧偏刚度的影响(即 K_f 减小至 eK_f)。

5.2　已知 $\xi = 0.04\text{m}$，$K = 60.0\text{kN/rad}$，$I_h = 20.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$，试求转向系的固有频率。

5.3 已知参数：ξ = 0.04m，m = 1500kg，l = 2.7m，K = 60.0kN/rad。试求自由控制情况下，在给定的参数及任意车速时，转向盘等效于绕主销的转动惯量的安全(使车辆运动稳定的)上限值。

5.4 试证明任何车速下，自由控制的稳定条件可近似地描述为 $I_h/I < \xi/2l$。

参考文献

[1] K. Nishii et al. , Effect of component factors on controllability and stability of vehicles, JASE Journal, Vol. 26, No. 7, 1972(In Japanese).

[2] T. Okada, Fundamental theory on automobile stability and control, JASE Journal, Vol. 26, No. 7, 1972(In Japanese).

PDG

第 6 章　车身侧倾与车辆动力学

6.1　引言

前面我们所讨论的车辆运动，是假设以车轮与车身之间为刚性连接，即两者间无相对位移为前提。实际经验证明，对理解基本的车辆运动来说，这一假定是不错的。然而，对正常的车辆而言，为改善其乘坐舒适性，车身与车轮互相之间是采用柔软的弹性连接的。一般称这样的连接机构为悬架系统，并称车身为簧上质量，车轮为簧下质量。车身与车轮之间的悬架提供了两者上、下相对位移的空间。当车辆侧向运动时，会有一作用于其质心的离心力，使得车身沿该力的方向倾斜。通常，我们称之为车身的侧倾运动。若考虑车辆的悬架，那么车辆将具有一个与车辆的侧向运动相伴随的侧倾运动自由度。

本章将分析车身侧倾的机理，进而推导考虑车身侧倾在内的车辆运动方程，并研究悬架系统特性及车身侧倾对车辆运动的影响。

6.2　侧倾几何学

关于车身的侧倾，R. Eberan 提出了以下假设：将侧倾中心作为车辆的几何瞬时转动中心，而且该侧倾中心是固定不变的[1]。由于该方法简便，已被作为了一种标准的方法而广泛使用。下面将基于这一假说，来研究具有恒定侧向加速度(由恒定离心力引起的)的车辆的侧倾机理。

6.2.1　侧倾中心和侧倾轴

一般而言，悬架系统有很多种，从最简单的刚性轴式悬架到轿车

中经常用到的一些独立悬架。而簧上质量和与簧下质量之间的相对垂向位移及角位移则取决于不同的悬架结构。

车辆的前、后悬架系统结构决定了其前、后轮的侧倾中心。前、后轮的侧倾中心的连线即为车身的侧倾轴。假定车轮在垂向、侧向均表现为刚性的，且接地点固定不动，那么过左、右轮接地点并垂直于车辆纵向的平面内的车身瞬时转动中心，就是所谓的侧倾中心。

图 6.1 所示为刚性轴悬架系统。由于其垂向弹簧的作用，车身的 A_1、B_1 两点只可能沿上下方向产生相对于簧下质量的位移。即使簧上质量发生了侧倾，由于包括车轮在内的簧下质量均假设为刚性的，因而簧下质量固定不动。由此可知，车身的侧倾中心为 O 点。若有侧倾力矩作用于车身，车身将以固定于簧下质量的 O 点为中心产生侧倾角 ϕ。

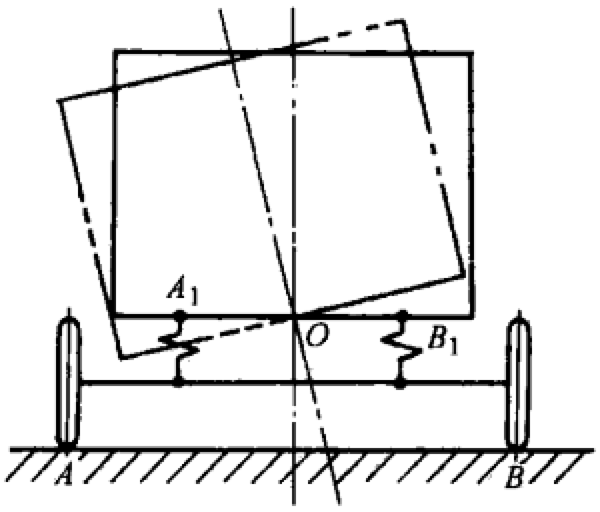


图 6.1　刚性轴悬架系统的侧倾中心

图 6.2 表示的是一个典型的独立悬架，我们通常称之为双横臂悬架。正如独立悬架的名字一样，其左、右两边的车轮可相对车身分别独立地运动。若固定车身，则左、右簧下质量相对车身的瞬时转动中心分别为 O_1、O_2 点。其中 O_1 点为 A_1A_2 和 A_3A_4 延长线的交点；O_2 点为 B_1B_2 和 B_3B_4 延长线的交点。当车辆转向时，车身侧倾，但车轮的接地点 A、B 固定不动，于是车辆必定绕 A、B 两点旋转。点 O_1、O_2 分别作垂直于 O_1A、O_2B 的运动，其中，O_1、O_2 是车身上的虚拟点（对车轮也同样）。因此，车身相对地面侧倾时的瞬心，即侧倾中心 O 应为 O_1A 与 O_2B 延长线的交点。

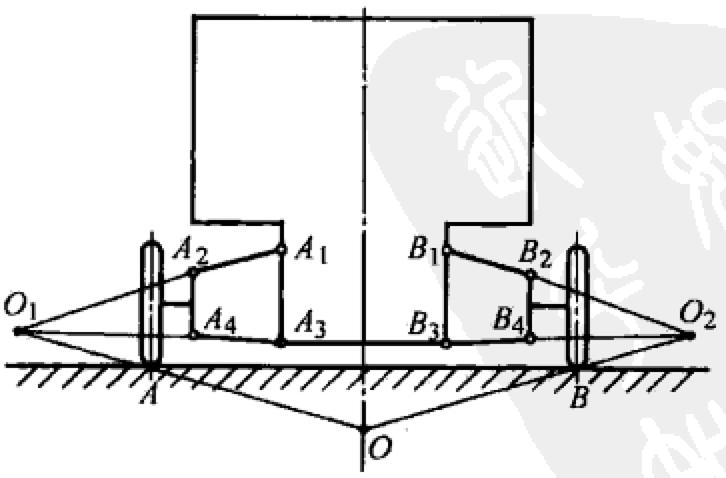


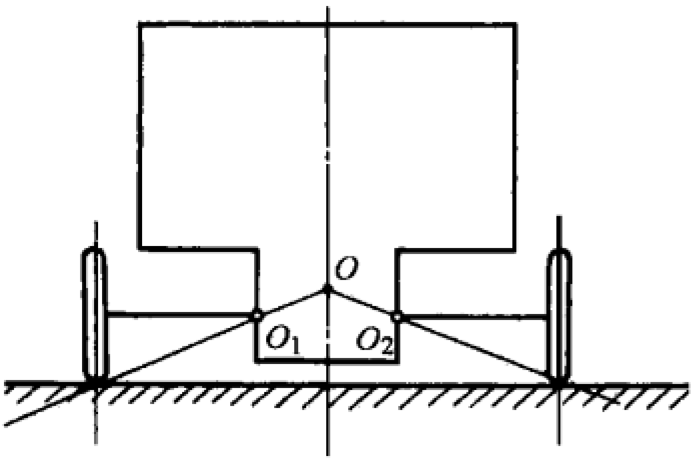
图 6.2　双横臂独立悬架系统的侧倾中心

以同样的方法，我们可以得到其他形式独立悬架的

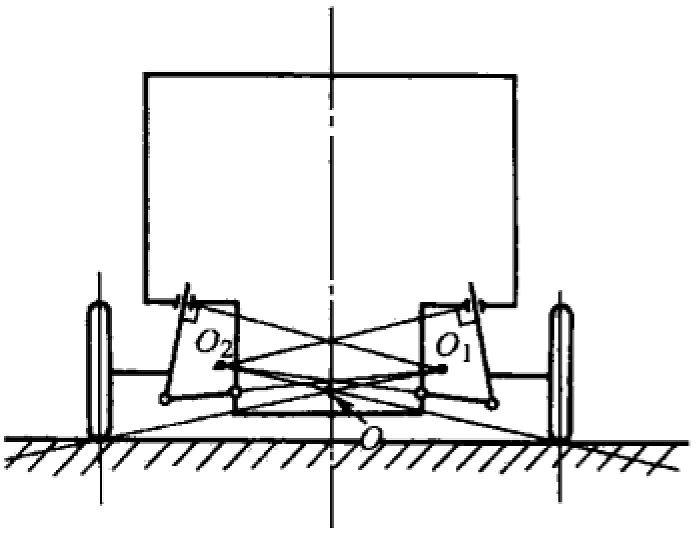
侧倾中心，如图 6.3 所示。

显然，车身的侧倾中心位置取决于其悬架系统的结构。一般来说，车辆及其悬架系统是左右对称的。这样，侧倾中心总是位于其对称轴上，只是其高度随悬架系统结构的不同而异。

侧倾中心是车身的瞬时转动中心，其位置随悬架的运动而变化。上面介绍的侧倾中心 O 均为当侧倾角为零时的位置；如果车辆发生侧倾，侧倾中心将随之移动。为了更好地理解这一点，图 6.4 分别给出了当车身侧倾角不为零时，双横臂悬架和单横臂悬架的侧倾中心 O'。

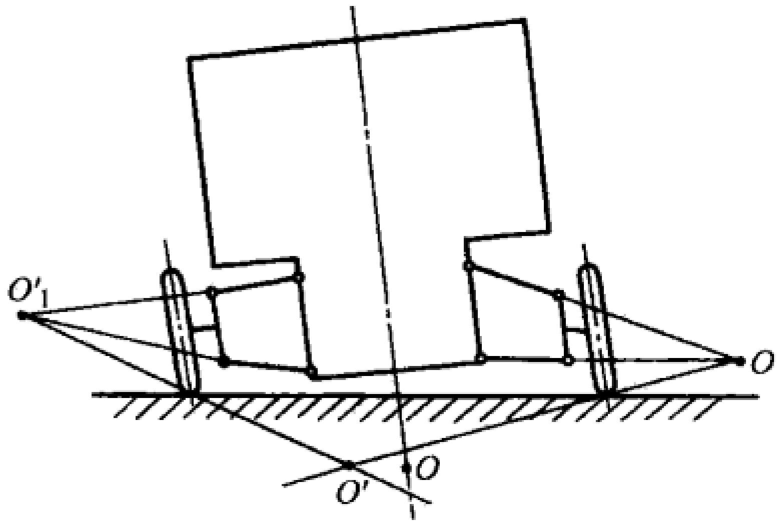


单横臂悬架

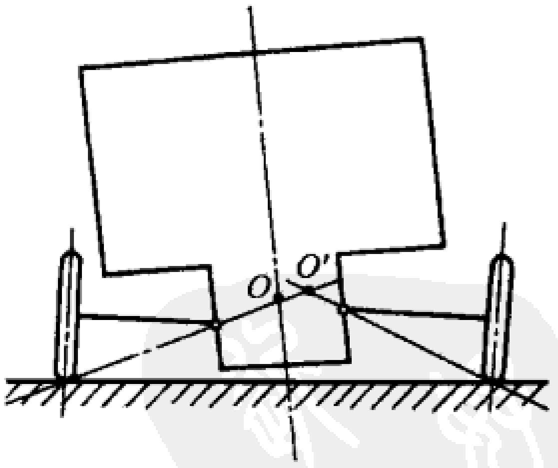


麦弗逊式悬架

图 6.3　独立悬架系统的侧倾中心



双横臂悬架



单横臂悬架

图 6.4　车身侧倾时侧倾中心位置的变化

如果侧倾角不是太大，侧倾中心的移动量较小，我们则可以认为侧倾中心是固定于 O 点的。即使在侧倾中心移动的情况下，我们仍

然可以研究车辆的侧倾机理。只不过是采用固定的侧倾中心，对研究基本的车辆动力学更为方便、更易于理解。基于 Eberan 对侧倾中心的假设，可得到车辆前、后的侧倾中心，如果车身为刚体，那么得到的车辆侧倾轴如图 6.5 所示。可见，前、后侧倾中心不一定相对地面于同一个高度，因而通常侧倾轴不平行于车辆的纵轴。

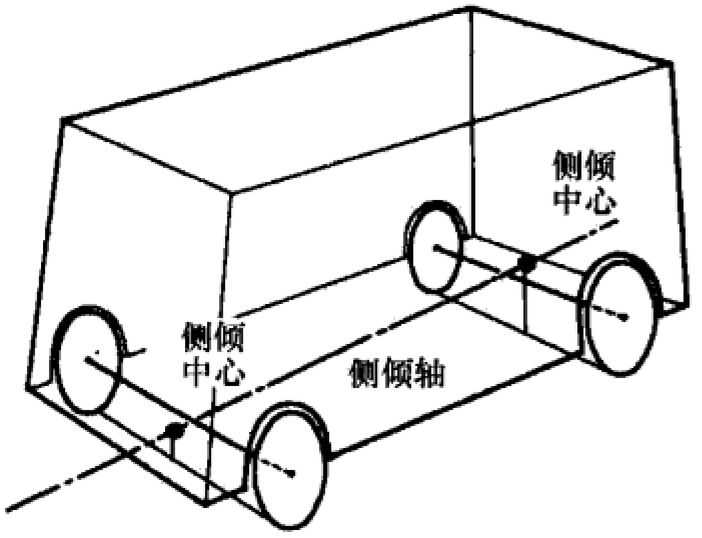


图 6.5　侧倾轴

需要说明的是，当车辆伴随着大车身侧倾角运动时，上述关于固定侧倾中心和侧倾轴的概念将不再适用。这时，一般以车辆的四轮超静定问题来处理车身的侧倾。

6.2.2　侧倾刚度和载荷转移

现在我们假设，车身具有恒定的侧向加速度，离心力作用于车辆质心。通常情况下，车辆的质心不在其侧倾轴上，而是位于侧倾轴的上方，如图 6.6 所示。因此，此时作用于车身的离心力将产生一个绕侧倾轴转动的侧倾力矩，并使车身产生一个恒定的侧倾角。车身发生侧倾时，悬架左、右两边的弹簧在垂向上将一边伸张，另一边压缩。因而形成与由离心力引起的侧倾力矩相平衡的一个力矩。我们称每单位侧倾角下由悬架弹簧伸缩产生的力矩为侧倾刚度。

设前、后悬架的侧倾刚度分别为 $K_{\phi f}$、$K_{\phi r}$，前、后侧倾中心距地面的高度分别为 h_f、h_r，前、后轮的轮距分别为 d_f、d_r，车辆的质心与其侧倾轴之间的距离为 h_s，前、后轴与车辆质心的垂向距

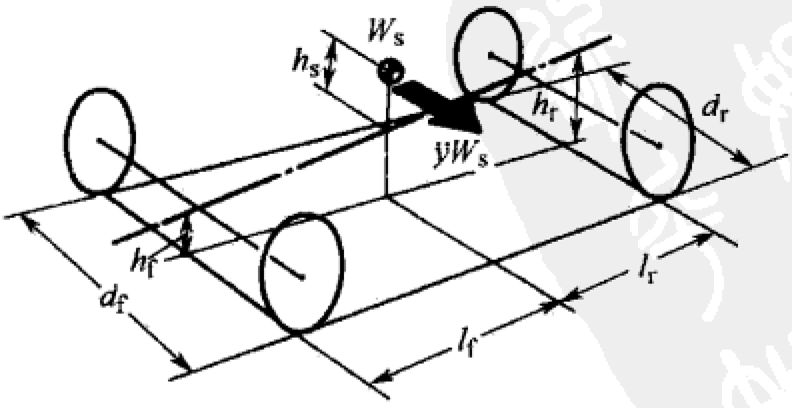


图 6.6　侧倾中心和质心高度

离为 l_f、l_r。由于簧下质量通常相对于簧上质量较小，因而可将其忽略。此时，认为整个车重就是车身的重量，用 W_s 表示。另记，车辆侧向加速度为 $\ddot{y}$(与 3.3.3 小节表示的相同)，那么作用于车身的惯性力等于 $\ddot{y}W_s$。假设车身为刚体且侧倾角 ϕ 很小，则由该惯性力引起的侧倾力矩为 $\ddot{y}W_sh_s$，由车身侧倾而产生的侧倾重力矩为 $W_sh_s\phi$，故车身侧倾角 ϕ 可由下列方程求得：

$$(K_{\phi f}+K_{\phi r})\phi=\ddot{y}W_sh_s+W_sh_s\phi \text{ 或 } \phi=\frac{\ddot{y}W_sh_s}{K_{\phi f}+K_{\phi r}-W_sh_s} \qquad (6.1)$$

对作用于车辆的惯性力 $\ddot{y}W_s$ 而言，必须有与之相平衡的轮胎力。将作用于质心的 $\ddot{y}W_s$ 分解到前、后轮，则可认为：分别有大小为 $\ddot{y}W_sl_r/l$、$\ddot{y}W_sl_f/l$ 的力作用于前、后轮，并分别与前、后轮胎的侧向力相等，其中 $l=l_f+l_r$。

如果车身发生侧倾，前、后轴的左、右轮都将发生一方载荷增加，而另一方载荷减少的情况，即所谓的载荷转移，如图 6.7 所示。设车辆前、后的载荷转移量分别为 ΔW_f、ΔW_r，分别在垂直于车辆纵向的前、后轮位置平面内，由绕其相应侧倾中心的力矩平衡关系可得：

$$K_{\phi f}\phi=\Delta W_fd_f-\frac{\ddot{y}W_sl_r}{l}h_f \qquad (6.2)$$

$$K_{\phi r}\phi=\Delta W_rd_r-\frac{\ddot{y}W_sl_f}{l}h_r \qquad (6.3)$$

若假定此时前、后轮之间并没有载荷转移发生。将式(6.1)代入式(6.2)和式(6.3)，可分别求得 ΔW_f、ΔW_r 如下：

$$\Delta W_f=\frac{\ddot{y}W_s}{d_f}\left(\frac{K_{\phi f}h_s}{K_{\phi f}+K_{\phi r}-W_sh_s}+\frac{l_r}{l}h_f\right) \qquad (6.4)$$

$$\Delta W_r=\frac{\ddot{y}W_s}{d_r}\left(\frac{K_{\phi r}h_s}{K_{\phi f}+K_{\phi r}-W_sh_s}+\frac{l_f}{l}h_r\right) \qquad (6.5)$$

以上方程给出了以恒定侧向加速度行驶的车辆由于其车身侧倾而产生的左、右轮载荷转移量。方程表明，侧倾轴至车身质心的高度 h_s 越大，则前、后轴的横向载荷转移就越大。此外，前、后轴的横向载荷转移量基本上正比于其相应侧偏刚度与总侧倾刚度的比值。

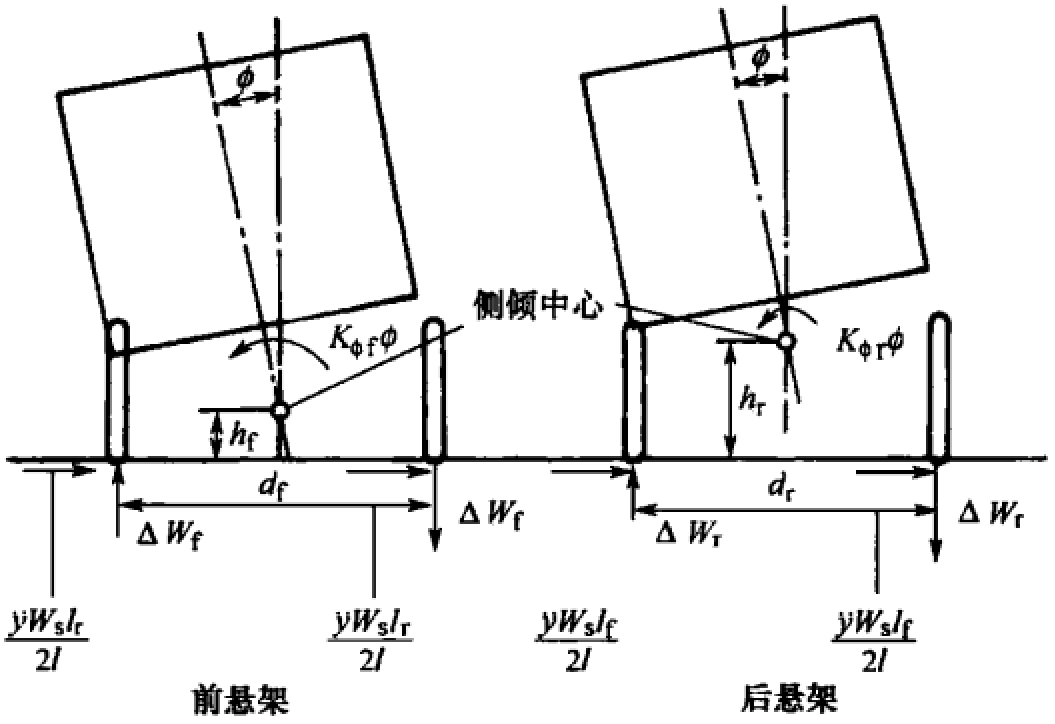


图 6.7　由车身侧倾引起的载荷转移

式(6.4)和式(6.5)的最后一项取决于侧倾轴的地面高度 h_f、h_r，并会引起顶起效应(jack-up)。

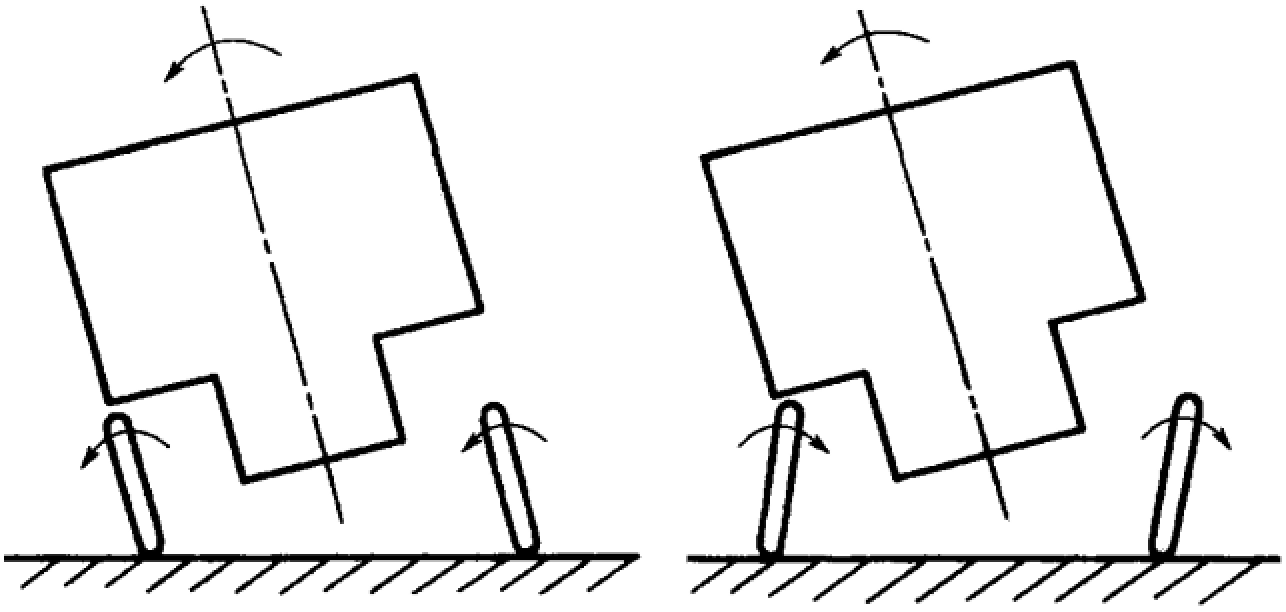
6.2.3　外倾变化和侧倾转向

当车身绕侧倾轴产生侧倾角时，如果车轮接地点不动，包括车轮在内的簧下质量也相对地面产生侧倾。由车身侧倾引起车轮相对地面的倾斜，使得车轮外倾角发生变化。同时，由于车身侧倾，也使车轮相对于车身产生垂向的相对位移。此时，取决于悬架系统结构的不同，车轮可能会在相对于车身垂向移动的同时，在水平面内产生角位移，我们称之为“侧倾转向”。

由车身侧倾引起的车轮外倾变化和侧倾转向，与悬架系统的结构有关。因而在设计车辆悬架时，要预先考虑到这些因素，积极地利用其可能为车辆动力学带来的影响，或有时杜绝其影响。本章将跳过对各种形式悬架的外倾变化和侧倾转向机理的详细解释，只讨论与之相关的基本特性。有时，人们也用一个统称，将外倾变化和侧倾转向一并称为由侧倾引起的校准变形(alignment change)。

对刚性轴悬架而言，不会因车身侧倾而引发车轮的任何外倾角变化；只有对独立悬架而言，才会由车身侧倾而导致车轮的外倾变化。

根据各种独立悬架结构的不同，有两种情形可能发生：图 6.8a 车轮沿车身侧倾相同的方向产生对地面的外倾变化，我们称之为正外倾；图 6.8b 沿侧倾方向相反发生外倾变化，称之为负外倾。



a)　　　　b)

图 6.8　车身侧倾引起的外倾变化量

a）正外倾　b）负外倾

各种独立悬架系统均由空间连杆机构（即导向机构）构成，所以车身的侧倾角和外倾变化可通过导向机构的几何学解析求得。图 6.9 以双横臂悬架为例，计算并实测了由于车轮相对于车身上下移动而引起的外倾角变化。即使是对于同类型的悬架结构，结果也会因导向机构的布置不同而产生本质上的变化。由图可知，当侧倾角不大时，可认为外倾变化量几乎正比于侧倾角。而随着侧倾角变大，两者的线性关系演变为非线性。一般来讲，其他形式的悬架也同样。大的侧向加速度下，外倾变化的非线性特性是影响车辆运动的主要因素之一。而在小侧向加速度下，车轮外

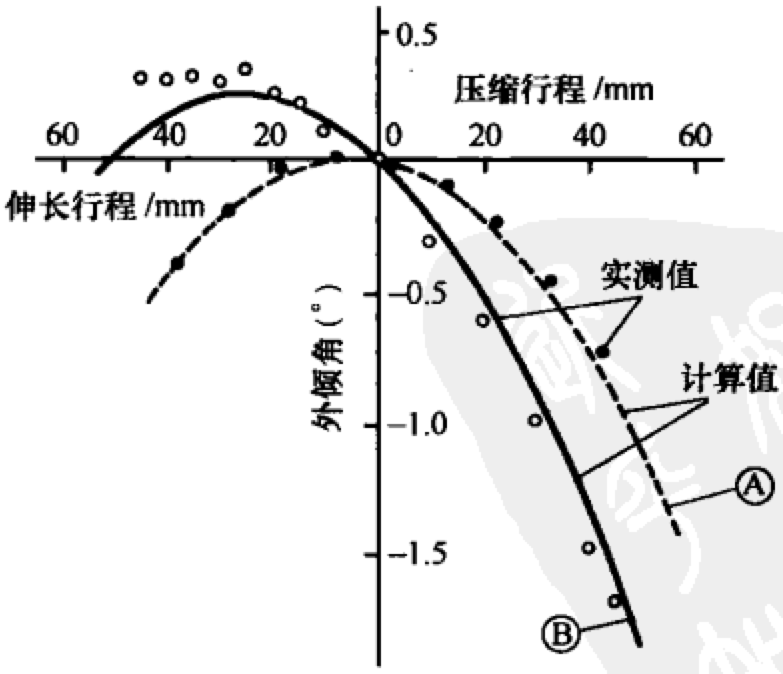


图 6.9　相对悬架行程的外倾角变化

倾角变化量可以看成是与车身侧倾角正比，其方向则可能是如图6.8a或图6.8b中所示的其中一种。

例题6.1

试求证如图6.2或图6.3所示的悬架机构几何条件，基本确定由车身侧倾引起的外倾角变化的正、负情况。

题解：

当发生车身侧倾时，其左侧部分均向下运动，而右侧部分均向上运动。当簧下质量绕轮胎接地点运动时，如图6.2中的A点，则发生了外倾变化。由于外倾变化是正的，因而左轮中心线左侧的簧下质量的任何一点都将下移，而其右半部分都将上移。但如果是负的外倾变化，则情况正好相反。

当侧倾发生时，作为虚拟点O_1，由于同时固定于车身和簧下质量左侧，它必须按与车身侧倾方向一致的方向移动，且产生外倾变化。如果点O_1在车身左侧及左车轮中心线右侧，则表明悬架是负外倾。如果点O_1在车身和左车轮中心线左侧，或者在车身右侧，那么则为正外倾。

由车身侧倾引起的侧倾转向也取决于悬架系统的结构。对刚性轴悬架而言，通常采用钢板弹簧连接车身与车轮。当车身发生侧倾时，在车轴上的弹簧安装点将沿前后方向移动，并导致车轴相对于车身在水平面内产生角位移。对这种刚性轴悬架的侧倾转向，有时我们称之为侧倾引起的轴转向。

对独立悬架而言，其侧倾转矢量可通过对导向机构的几何学分析得到。与外倾变化类似，即使是同样形式的导向机构，侧倾转向的大小、方向也会因导向机构的布置不同而变化相当大。在设计悬架时，通常要考虑到其能够限制侧倾转矢量。对

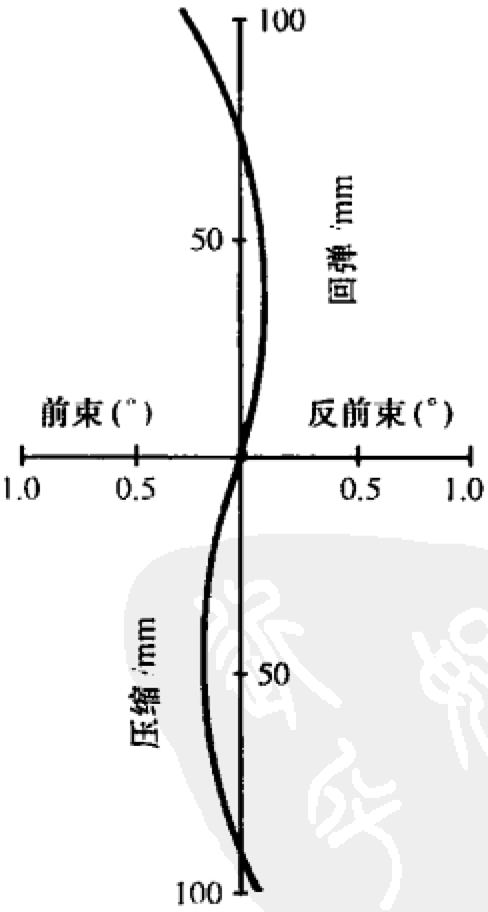


图6.10 侧倾转向曲线（悬架运动引起的束角变化）

独立悬架而言，如果侧倾角小，则也可以认为侧倾转矢量正比于车身侧倾角。而侧倾转向的方向可正可负，取决于不同的悬架系统的结构。

有时，我们将独立悬架的侧倾转向也称为悬架运动行程引起的车轮束角变化。图 6.10 给出了一个车轮束角变化的例子。我们将朝车辆内侧转向的情形称为前束(toe-in)，朝外的情形称为反前束(toe-out)。

6.3　车身侧倾与车辆动力学

通过考察车辆的稳态转向，我们已经清楚了主要影响车辆动态性能的车辆转向特性。在车辆作稳态转向运动中，其质心受一恒定的离心力作用。如果考虑悬架，车身将产生一个恒定的侧倾角。前面章节中，我们已从几何学角度解释了车身侧倾的机理。本节将通过考察具有车身侧倾的稳态转向运动，研究车身侧倾对车辆转向特性的影响。同时，也研究悬架的侧向刚度对车辆转向特性的影响。

6.3.1　载荷转移效应

如第 2 章所述，轮胎的侧向力随其载荷呈饱和曲线的形式而变化。因此，左、右轮载荷发生转移时，其侧向力之和将比不考虑载荷转移时有所减少。而且，左、右载荷转移量越大，侧向力的减小量也越大。

图 6.11 给出了轮胎的载荷转移与侧向力变化的典型关系。设载荷为 W 的两轮车轴上，产生了 ΔW 的左右载荷转移，则两轮各自的侧向力分别为 $\overline{P_1A_1}$ 和 $\overline{P_2A_2}$，其和为 $2\,\overline{BA}$。当没有载荷转移时，其和为 $2\,\overline{PA}$。所以侧偏力的减少量为 $2\,\overline{PB}$。

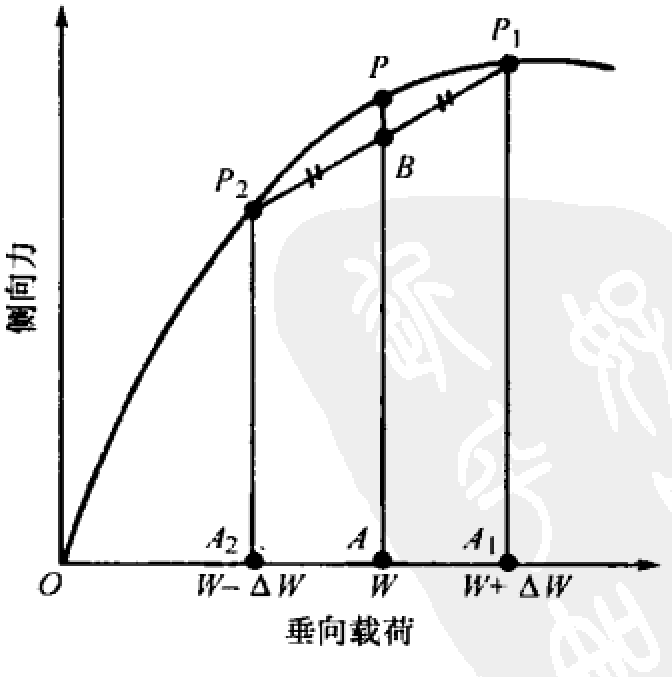


图 6.11　载荷转移与侧向力的关系

当车身发生侧倾时，车辆的横向的载荷转移将发生在前、后

轴，正如式(6.4)和式(6.5)所分别描述的那样。因此，与无侧倾时相比，前、后轮的侧偏刚度将相应于ΔW_f、ΔW_r的大小而减小。为使车辆以无侧倾时相同的速度和半径作稳态转向，前、后轮的侧向角应相应于ΔW_f、ΔW_r增大，以得到足够大的与离心力相平衡的侧偏力。

车辆的转向特性是由前、后轮侧偏角幅值的相对关系来定义的。因此，若$\Delta W_f > \Delta W_r$，则车辆的转向特性将趋向于不足转向；若$\Delta W_f < \Delta W_r$，则将趋向于过度转向。

式(6.4)、式(6.5)表明，前、后轮的载荷转移量ΔW_f、ΔW_r取决于以下因素：

- 前、后轴侧倾中心高度h_f和h_r。
- 前、后侧倾刚度比$K_{\phi f}/K_{\phi r}$。
- 前、后轮的轮距d_f和d_r。

如果以下条件成立：$h_f\to$大，$h_r\to$小，$K_{\phi f}/K_{\phi r}\to$大，$d_f\to$小，$d_r\to$大，则ΔW_f趋向于变得比ΔW_r大，则车辆的转向特性向不足转向趋势变化；相反地，如果$h_f\to$小，$h_r\to$大，$K_{\phi f}/K_{\phi r}\to$小，$d_f\to$大，$d_r\to$小，则车辆的转向特性向过度转向趋势变化。

下面，我们进一步考察由左、右车轮载荷转移引起的车轴等效侧偏特性的下降情况。

图6.12中的曲线OP表示，轮胎在载荷W下其侧偏角与侧向力的关系。OP_1为载荷增加了ΔW时的轮胎侧向力，而OP_2为载荷减少了ΔW时的轮胎侧向力，两者之和即为当左右载荷之差ΔW时，其车轴(即两轮)的侧向力，相当于曲线OB的两倍。

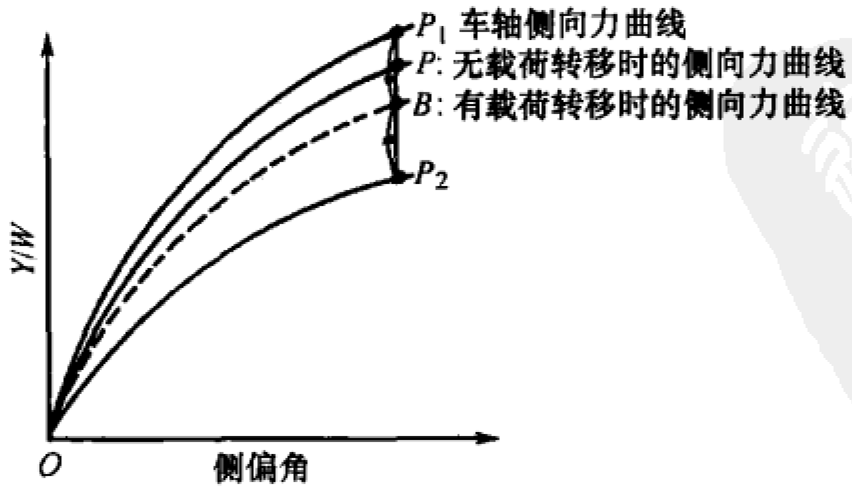


图6.12 车轴侧向力与垂直载荷关系

如果没有左右轮的载荷差，则车轴的侧向力为曲线 OP，且曲线 $OP >$ 曲线 OB。可以认为，这两条曲线是由车轴侧向力除其轴荷得到的。

设当侧向加速度分别为 $\ddot{y}_1$、$\ddot{y}_2$、$\ddot{y}_3$ 时，车轴上产生相应的左右载荷转移量为 ΔW_1、ΔW_2、ΔW_3。而每一情况下，车轴侧向力除以相应轴荷得到的值与其侧偏角的关系曲线如图 6.13 所示。如 3.3.3 小节所述，图 6.13 的纵坐标与车辆的侧向加速度一致。对应不同的载荷转移量，将曲线上的点 $\ddot{y}_1$、$\ddot{y}_2$、$\ddot{y}_3$ 向纵坐标投影，然后将所有这些点相连，得到的新的曲线即表示由侧向加速度而引起载荷转移时，车轴的等效侧偏力曲线。

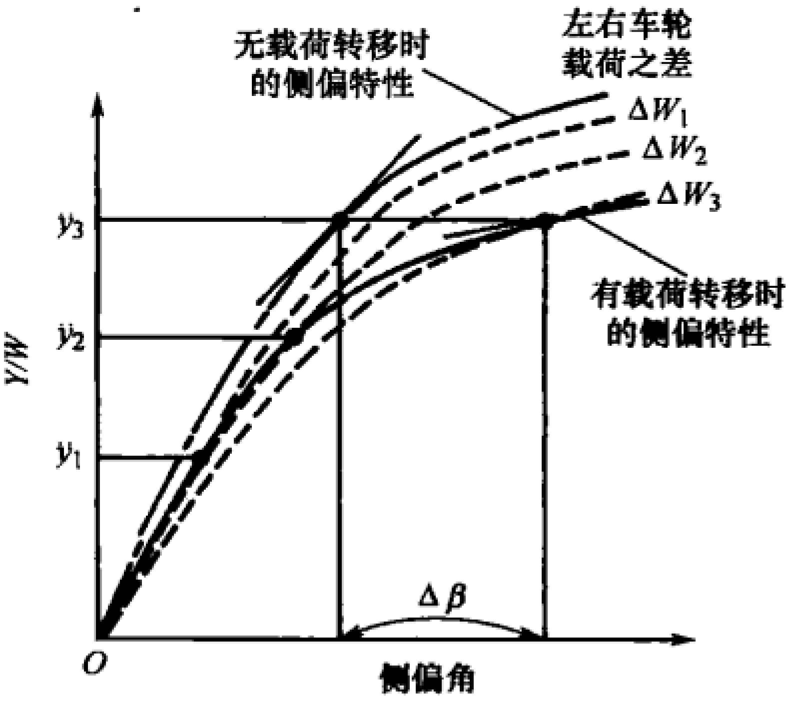


图 6.13　载荷转移对车轴侧向力的影响

通过上述分析可知，由于轮胎的非线性特性，可预期由载荷转移引起的轮胎特性变化，进而由此导致的车辆运动特性的变化，在大侧向加速度下会变得更明显。

6.3.2　车轮外倾变化效应

如 6.2.3 小节所述，由车身侧倾引起的车轮对地外倾变化有两种情况：一种为其变化沿车身侧倾方向的同向发生（即正外倾）；另一种为沿其相反方向发生（即负外倾）。不管哪种情况，如果车轮对地面产生外倾角，那么将有一个侧向力（外倾侧向力）作用于轮胎。如

第 2 章所述，该外倾侧向力与外倾角成正比关系。在稳态转向运动时，外倾推力是与车辆质心离心力相平衡的力之一。当发生正外倾时，外倾侧向力沿离心力方向作用。因此，为了使车辆能以无外倾角时相同的半径及速度作稳态转向运动，其轮胎侧偏角必须比无外倾角时进一步加大，以得到抵消外倾侧向力的侧偏力。相反，如果产生负外倾角时，由于外倾侧向力沿离心力的反向作用，因而与无外倾角时相比，其侧向力减小，从而所需的侧偏角也更小。

车辆的转向特性由其前、后车轮侧偏角的相对大小关系决定。因此，正外倾变化若发生在前轮，则使车辆转向特性向不足转向趋势变化；若发生在后轮，则向过度转向趋势变化。相反，负外倾变化若出现在前轮，则使车辆的转向特性向过度转向趋势变化，而在后轮出现，则向不足转向趋势变化。

6.3.3　侧倾转向效应

由于车身侧倾引起的车轮转角的变化，被称为侧倾转向。定义与转向角同向的侧倾转角为正，异向的为负。

图 6.14 从几何学的角度分析了作稳态转向运动的、伴随车身侧倾的车辆，其中 α_f、α_r 为前、后轮的侧倾转向角。不包括侧倾转向的稳态转向运动几何学关系可由式(3.34)给出。有侧倾转向时，根据图 6.14，式(3.34)变为

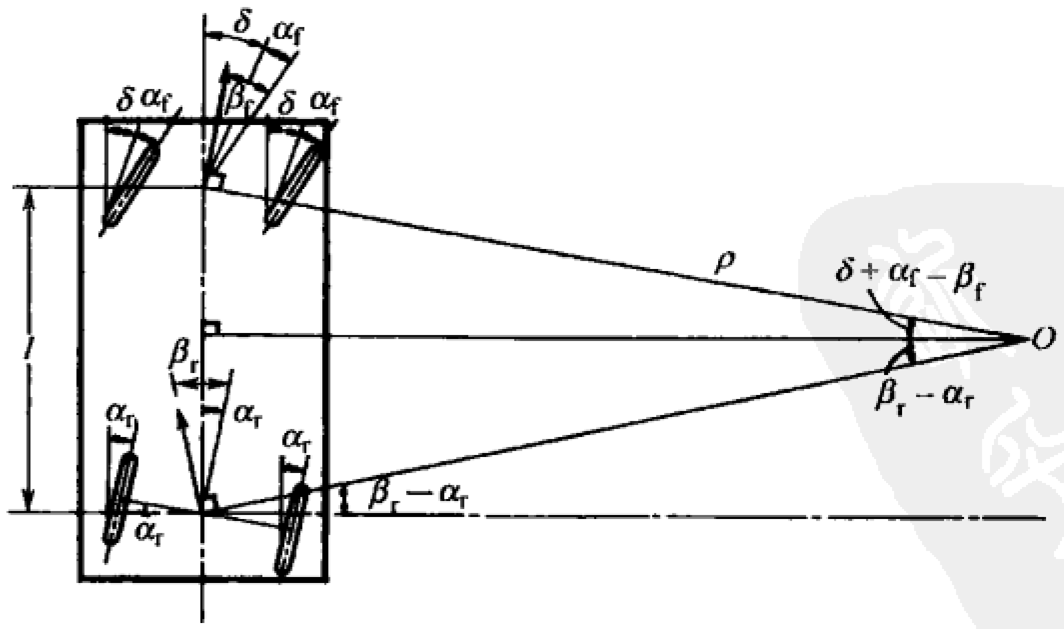


图 6.14　伴随侧倾转向的稳态转向

$$\rho = \frac{l}{\delta - \beta_f + \beta_r + \alpha_f - \alpha_r} \tag{6.6}$$

式(6.6)表明，车辆的转向特性不仅由前、后轮侧偏角 β_f、β_r 的相对大小关系确定，还会受到前、后轮侧倾转向角 α_f、α_r 的影响。车辆以恒定的前轮转角稳态转向，当其回转半径随速度或加速度增加时，即为不足转向特性；而降低时即为过度转向特性。如果前轮的侧倾转向角 α_f 为正，将会促使车辆向过度转向特性变化；而若 α_f 为负，车辆将趋向不足转向特性变化。相反，如果后轮的侧倾转向角 α_r 为正，将使车辆转向特征向不足转向变化；而为负时则向过度转向变化。图6.15表明了上述侧倾转向对车辆转向特性的影响。将式(6.6)变形，得到：

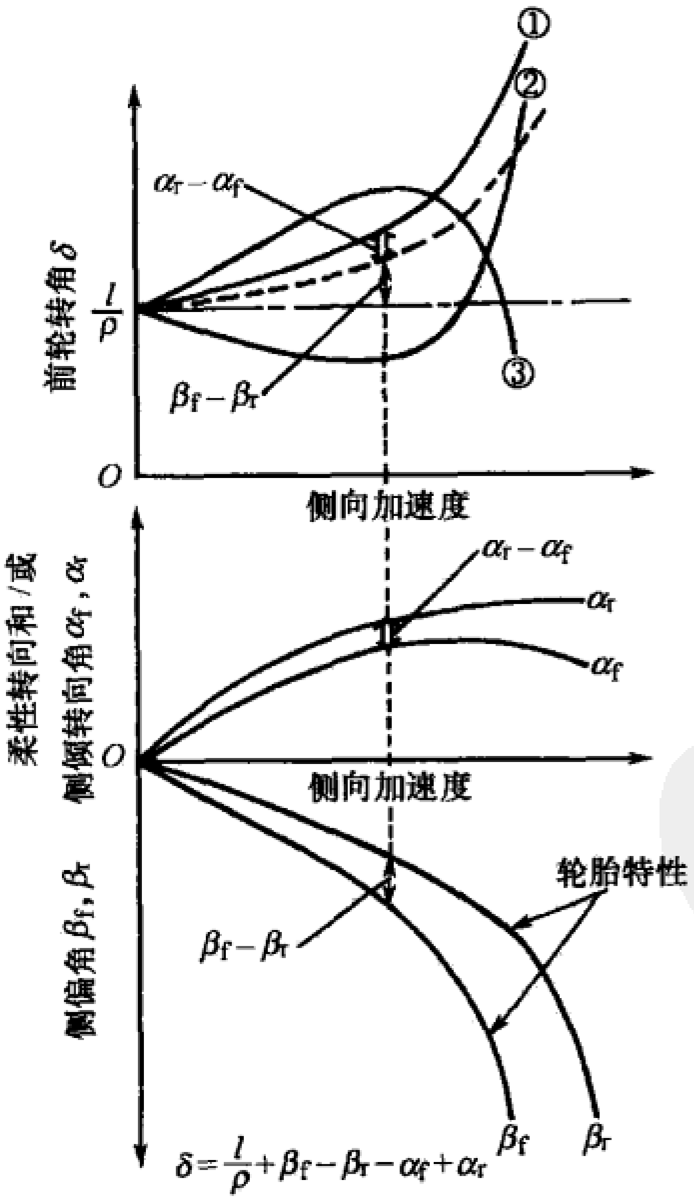


图6.15　伴随侧倾转向的车辆转向特性

$$\delta = \frac{l}{\rho} + \beta_f - \beta_r + \alpha_r - \alpha_f \tag{6.6'}$$

正如3.3.3 小节讨论的那样，转向过程中 $\beta_f - \beta_r$ 的关系可由侧向加速度 $\ddot{y}$ 求得。前、后轮的侧倾转向 α_f、α_r 也可以由正比于侧向加速度 $\ddot{y}$ 的侧倾角（或悬架的行程）求得。

综上所述，在考虑侧倾转向情况下，式(6.6′)可用来分析车辆的转向特性，以获得稳态转向转向角 δ 与侧向加速度 $\ddot{y}$ 的关系。

例题 6.2

推导公式以表明侧倾转向对稳态转向回转半径的影响，其中前、后悬架的侧倾转向角均与车身侧倾角成正比。

题解：

由 3.3.1 小节第二部分结尾处的结果可知，对作稳态转向、侧向加速度为 mV^2/ρ 的车辆而言，其前、后轮胎的侧偏角分别为

$$\beta_f = \frac{mV^2 l_r}{2lK_f}\frac{1}{\rho}$$

$$\beta_r = \frac{mV^2 l_f}{2lK_r}\frac{1}{\rho}$$

由式(6.1)可知，稳态转向运动中的车身侧倾角为

$$\phi = \frac{\ddot{y}W_s h_s}{K_\phi} = \frac{m_s V^2 h_s}{K_\phi}\frac{1}{\rho}$$

其中，$K_\phi = K_{\phi f} + K_{\phi r} - W_s h_s$。

于是，正比于侧偏角的前、后轮侧倾转向角可描述如下：

$$\alpha_f = \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\phi = \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\frac{m_s V^2 h_s}{K_\phi}\frac{1}{\rho} \tag{E6.1}$$

$$\alpha_r = \frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi = \frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\frac{m_s V^2 h_s}{K_\phi}\frac{1}{\rho} \tag{E6.2}$$

将以上所得到的 β_f、β_r、α_f、α_r 带入式(6.6)中，可得：

$$\rho = \left\{1 + \left[-\frac{m(l_f K_f - l_r K_r)}{2l^2 K_f K_r} - \frac{m_s h_s}{lK_\phi}\frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi} + \frac{m_s h_s}{lK_\phi}\frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\right]V^2\right\}\frac{l}{\delta} \tag{E6.3}$$

6.3.4　悬架侧向刚度及其效应

6.1 节中，我们描述了车身与车轮是如何通过悬架连接的。悬架给予了车轮一定的空间，使其可以相对车身产生主要是垂向的位移；然而，车身与车轮之间在侧向也并非完全是刚性连接的。

在本小节中，我们来考察悬架系统的侧向刚度对车辆转向特性的影响。

图 6.16 为车身与车轮在水平面内的连接方式。由图可见，轮胎侧向力的作用点通常不与通过悬架系统的刚度中心一致。因此，使得车轮在水平面内产生了一个角位移。我们称之为变形转向，它会影响车辆的转向特性。

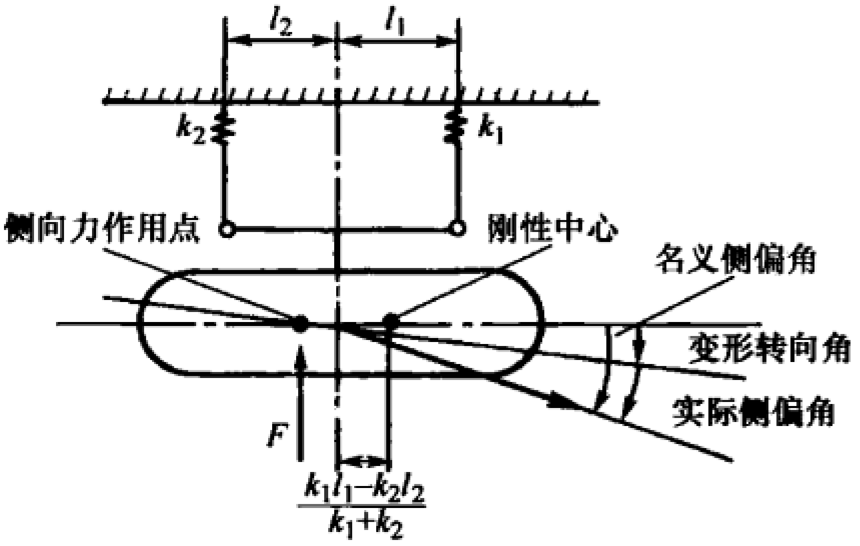


图 6.16　平面内的悬架模型

变形转向是由轮胎侧向力所产生的，而轮胎侧向力取决于侧向加速度。因此，悬架系统的变形转向是由车辆转弯时其侧向加速度引起的。若将图 6.15 中的 α_f、α_r 看成变形转向，则可以以研究侧倾转向同样的方法来研究变形转向对车辆转向特性的影响。

在侧向加速度较小的范围内，可认为变形转向与作用于轮胎上的侧向力成正比。若侧偏刚度为 K，侧向力正比于侧偏角，则得

$$\alpha = cF = cK(\beta - \alpha)$$

式中，c 为悬架的变形系数。

消去上式中的 α，有

$$F=\frac{K}{1+cK}\beta=eK\beta$$

式中，$e=1/(1+cK)$。

即变形转向等效于将轮胎侧偏刚度从 K 替换为 eK。这与 5.3.1 小节所描述的转向系刚度效应相类似。

以上结论可以从线性域扩展到非线性域，前者的变形转向角正比于侧向力；后者的变形转向角不正比于侧向力。同时考虑了悬架侧向刚度和转向系刚度影响的车辆转向特性如图 6.17 所示，表明了在变形转向效应影响下，轮胎的转向特性是如何等效地变化的。

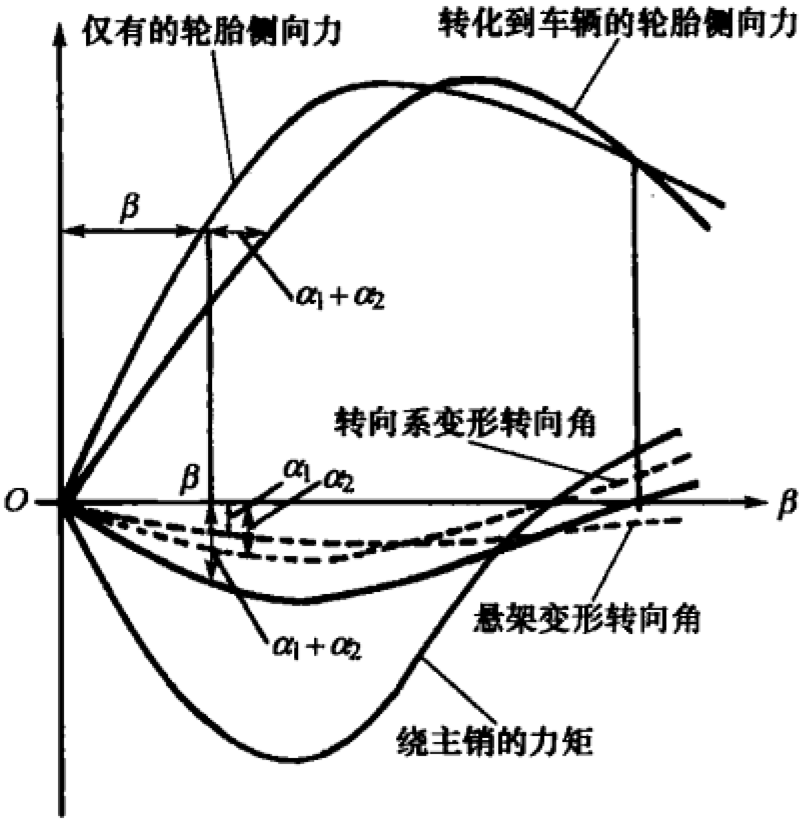


图 6.17　考虑变形转向的轮胎侧偏特性

设轮胎实际的侧偏角为 β，由于侧向力和绕主销的力矩的作用，产生了悬架的变形转向角 α_1 及转向系变形转向角 α_2，从而产生了名义侧偏角为 $\beta+\alpha_1+\alpha_2$。因而当轮胎的真正侧偏角为 β 时，其侧向力等效地对应于当侧偏角为 $\beta+\alpha_1+\alpha_2$ 时的值。这样，就可求得考虑了变形转向的等效轮胎侧偏特性，并研究它对车辆转向特性的影响。

6.4　考虑侧倾的运动学方程

到此为止，我们仅仅从几何学上，或是以静态的角度，考察了在

恒定侧向加速度下车身的侧倾机理。

下面，将以这些知识为基础，推导包括车身侧倾的车辆运动方程，以使我们能够进一步地研究车辆的运动。所推导的方程均以 Segel 以固定侧倾轴概念提出的运动方程为基础[2]。

对车辆运动的研究中，坐标系的选取不是必须有某个标准，可以因具体情况而定。这里，作者采用了自认为是最便于理解的坐标系。

6.4.1　坐标系和动力学模型

取与地面平行的 X-Y 平面，建立的 X-Y-Z 坐标系固定于绝对空间，如图 6.18 所示。

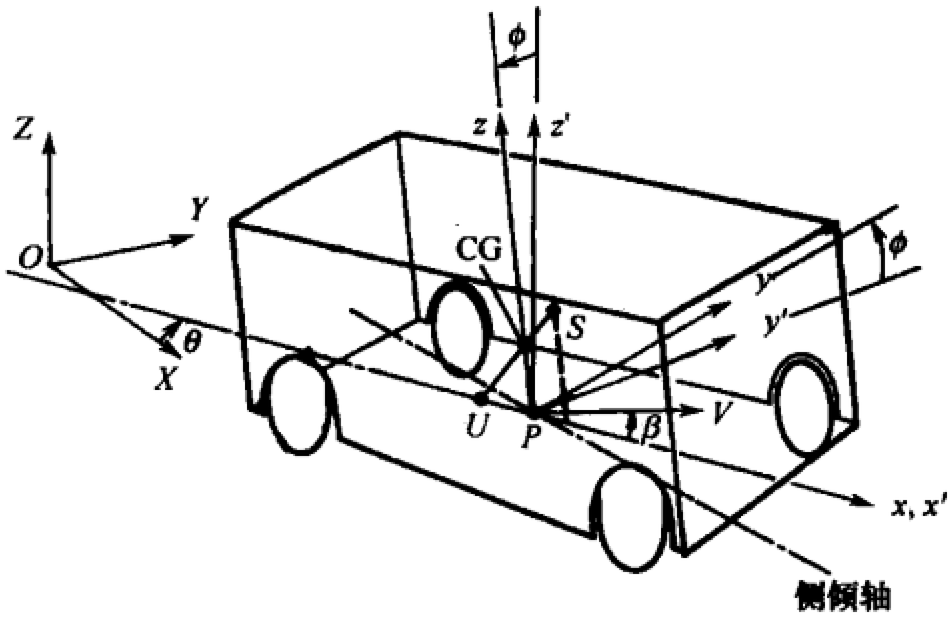


图 6.18　坐标系

图 6.18 中的 P 点为过车辆质心 CG 的垂线与侧倾轴的交点。以其为原点，得到固定于车身(即簧上质量)的坐标系 x-y-z。其中，平行于地面的车辆纵向为 x 轴(前方为正)，与其相垂直的侧向为 y 轴(车辆向前时左侧为正)，垂向为 z 轴(向上为正)。

同样以 P 为原点，但固定于簧下质量，得到坐标系 x'-y'-z'。其中，车辆纵向为 x'轴，与其垂直的侧向为 y'轴，垂向为 z'轴。

正如 6.2.1 小节所述，车辆侧倾轴不总与 x 轴一致。然而，为简便起见，假定车身绕 x 轴作侧倾运动。此外，假定车身侧倾角小且车辆绕 z 轴作横摆运动。簧下质量的侧倾运动忽略不计，并假定其绕 z' 轴作与车身相同的横摆运动(因此 x 轴与 x'轴总是一致的)。所有的

角位移、角加速度均取正的方向，如图 6. 18 所示。

图 6. 19 表示的即为簧上质量和簧下质量的等效力学模型。车身（即簧上质量）在 x-z 平面内对称分布，其质心位于 x-z 面内的 S 点。簧下质量在 z'方向的高度忽略不计，并认为其质量分布于 x'-y'平面上，其质心位于 x'轴上的 U 点。

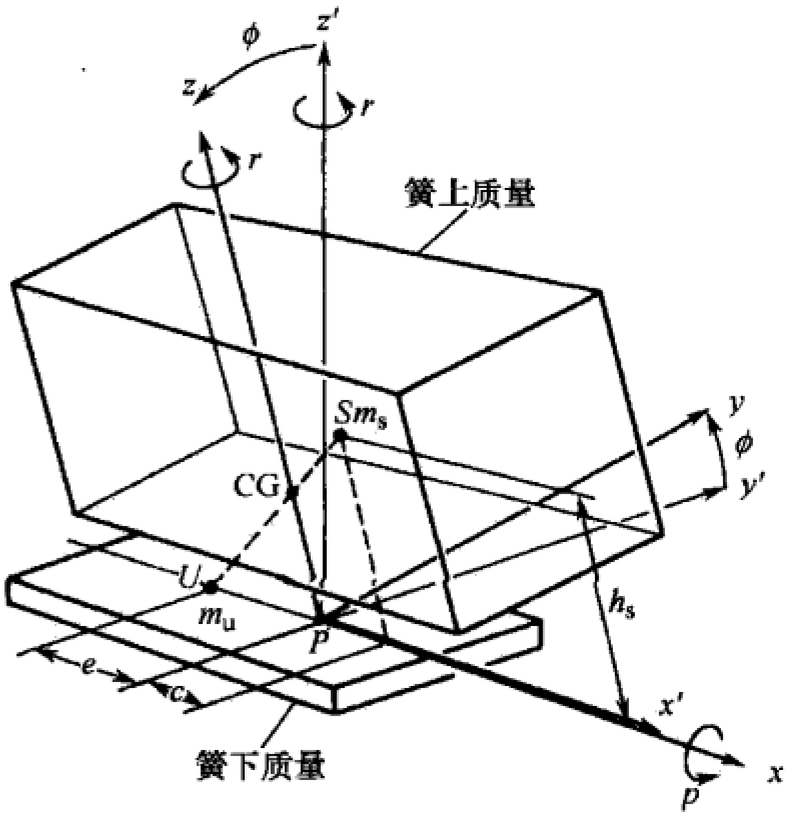


图 6. 19　等效动力学模型

这里，m_s 为簧上质量，m_u 为簧下质量，m 为整车质量；h_s 为簧上质量质心与 x 轴的距离，c、e 分别为簧上质量、簧下质量到 z 轴的距离；r、p 分别为车辆的横摆角速度和侧倾角速度；ϕ 为车身侧倾角。

6. 4. 2　惯性力

刚体的运动可分解为其质心的平动和绕其质心的转动。在此，我们将簧上质量和簧下质量均视为刚体，并对其进行运动分析。

1. 平动

对一个刚体而言，其质心的平动等同于其质量集中于其质心的质点运动。

坐标系 X-Y-Z 固定于绝对空间，而坐标系 x-y-z 固定于运动的刚

体，如图 6.20 所示。

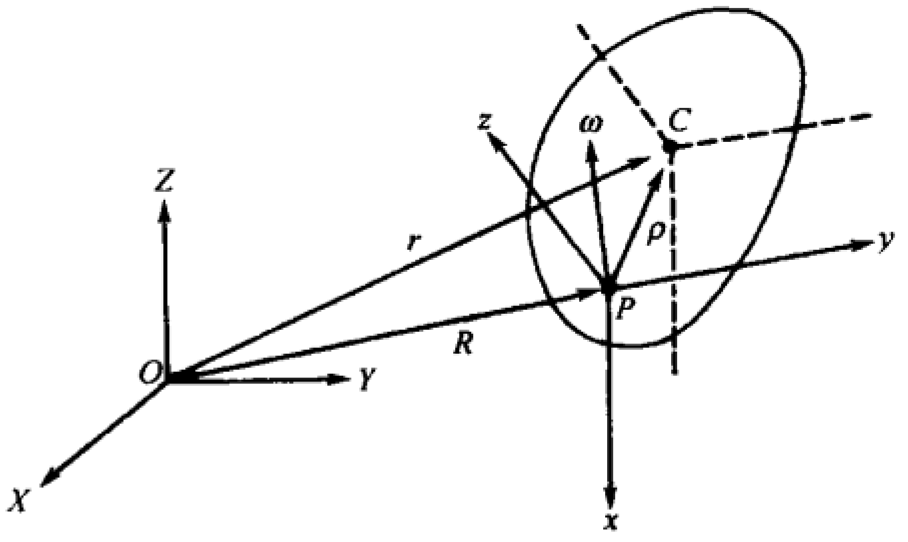


图 6.20　刚体的一般运动描述

设质心 C 相对于坐标系 x-y-z 的位置矢量为 $\boldsymbol{\rho}$，C 点和 P 点相对于坐标系 X-Y-Z 的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{R}$，则有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}$$

设坐标系 x-y-z 相对于坐标系 X-Y-Z 以速度 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 作平移运动，并以 $\boldsymbol{\omega}$ 的角速度转动，则有

$$\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{\rho}}_r$ 为 C 点相对于 P 点的速度。

若 C 点固定于坐标系 x-y-z，则 $\dot{\boldsymbol{\rho}}_r = 0$，有

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \tag{6.7}$$

在坐标系 X-Y-Z 下，簧上质量和簧下质量的质心 S 和 U，其平动矢量分别为 $\boldsymbol{r}_s$ 和 $\boldsymbol{r}_U$；在坐标系 x-y-z 下的平动矢量分别为 ρ_s 和 ρ_U；在坐标系 x-y-z 下和坐标系 x'-y'-z' 下的角速度分别为 ω_s 和 ω_U。设坐标系 x-y-z 的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，坐标系 x'-y'-z' 的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$，如图 6.21 所示。

由于点 S 和点 P 分别固结于坐标系 x-y-z 和坐标系 x'-y'-z'，根据式(6.7)，得到下列方程：

$$\dot{\boldsymbol{r}}_S = \dot{\boldsymbol{R}} + \omega_S \times \boldsymbol{\rho}_S \tag{6.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_U = \dot{\boldsymbol{R}} + \omega_U \times \boldsymbol{\rho}_U \tag{6.9}$$

设当 ϕ 小时，点 P 在 x 方向具有的速度分量为 u，在 y 或 y' 方向具有的速度分量为 v，则：

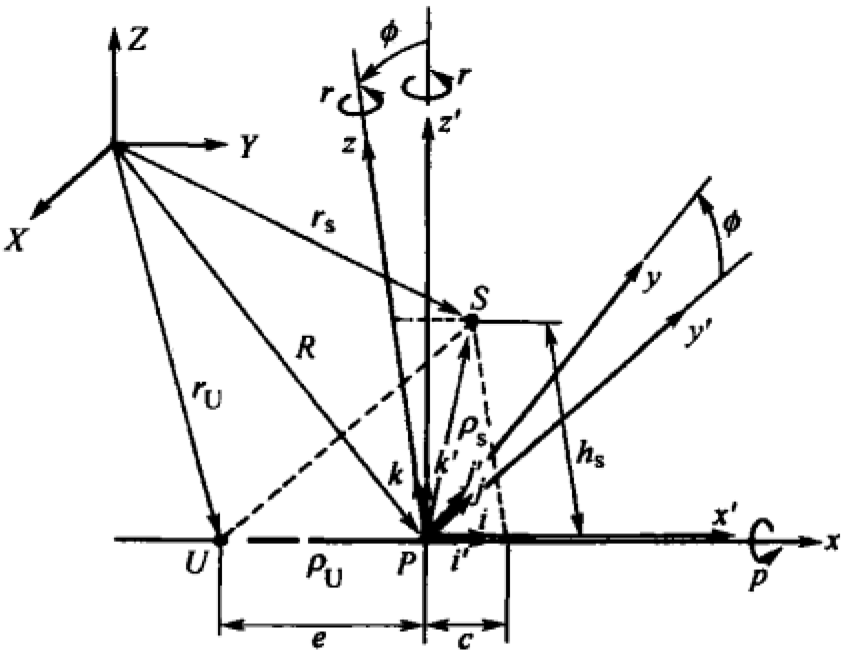


图 6.21　点 S 和点 P 的运动

$$\dot{\boldsymbol{R}} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} = u\boldsymbol{i}' + v\boldsymbol{j}' \tag{6.10}$$

与簧上质量一起运动的坐标系 x-y-z 具有绕 x 轴的侧倾角速度 p、绕 z 轴的横摆角速度 r，故有

$$\boldsymbol{\omega}_s = p\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{k} \tag{6.11}$$

与簧下质量一起运动的坐标系 x'-y'-z' 具有绕 z' 轴的横摆角速度 r，故有

$$\boldsymbol{\omega}_U = r\boldsymbol{k}' \tag{6.12}$$

并且，$\boldsymbol{\rho}_s$ 和 $\boldsymbol{\rho}_U$ 可分别写为如下形式：

$$\boldsymbol{\rho}_s = c\boldsymbol{i} + h_s\boldsymbol{k} \tag{6.13}$$

$$\boldsymbol{\rho}_U = -e\boldsymbol{i}' \tag{6.14}$$

分别将式(6.10)、式(6.11)和式(6.13)代入式(6.8)，并分别将式(6.10)、式(6.12)和式(6.14)代入式(6.9)，求得 $\dot{r}_s$ 和 $\dot{r}_U$ 分别如下：

$$\dot{\boldsymbol{r}}_s = u\boldsymbol{i} + (v - h_s p + cr)\boldsymbol{j} \tag{6.15}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_U = u\boldsymbol{i}' + (v - er)\boldsymbol{j}' \tag{6.16}$$

分别对式(6.15)和式(6.16)进行微分，求得 S 点和 U 点的加速度矢量分别为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_s = (\dot{u} - vr + h_s pr - cr^2)\boldsymbol{i} + (\dot{v} + ur - h_s\dot{p} + c\dot{r})\boldsymbol{j} + (vp + h_s p^2 + cpr)\boldsymbol{k} \tag{6.17}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_U = (\dot{u} - vr + er^2)\boldsymbol{i}' + (\dot{v} + ur - e\dot{r})\boldsymbol{j}' \tag{6.18}$$

根据式(6.17)和式(6.18)，簧上质量和簧下质量的侧向(即 y 和 y' 方向)加速度 α_s 和 α_U 分别为

$$\alpha_S = \dot{v} + ur - h_s\dot{p} + c\dot{r}$$
$$\alpha_U = \dot{v} + ur - e\dot{r}$$

如果点 P 的侧偏角 $|\beta| \ll 1$、且 P 点的速度 V 总为恒定，则 $u \approx V$、$v \approx V\beta$，因而有

$$\alpha_S = V\dot{\beta} + Vr - h_s\dot{p} + c\dot{r}$$
$$\alpha_U = V\dot{\beta} + Vr - e\dot{r}$$

若簧上质量和簧下质量分别为 m_s 和 m_U，则它们的惯性力 Y_s 和 Y_U 分别为

$$Y_S = m_S\alpha_S = m_S V(\dot{\beta} + r) - m_S h_S\dot{p} + m_S c\dot{r}$$
$$Y_U = m_U\alpha_U = m_U V(\dot{\beta} + r) - m_U e\dot{r}$$

因此，车辆总的侧向惯性力 $\sum Y$ 为

$$\sum Y = Y_S + Y_U = (m_S + m_U)V(\dot{\beta} + r) - m_S h_s\dot{p} + (m_S c + m_U e)\dot{r}$$

这里，$m_S + m_U = m$，而 CG 是整车的质心，因而 $m_S c - m_U e = 0$，于是，有

$$\sum Y = mV(\dot{\beta} + r) - m_S h_s\dot{p} \tag{6.19}$$

例题 6.3

通过对式(6.15)和式(6.16)进行微分，推导式(6.17)和式(6.18)。

题解：

由式(6.15)和式(6.16)，得：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \dot{u}\boldsymbol{i} + u\dot{\boldsymbol{i}} + (\dot{\nu} - h_s\dot{p} + c\dot{r})\boldsymbol{j} + (\nu - h_s p + cr)\dot{\boldsymbol{j}} \tag{E6.4}$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_U = \dot{u}\boldsymbol{i}' + u\dot{\boldsymbol{i}}' + (\dot{\nu} - e\dot{r})\boldsymbol{j}' + (\nu - er)\dot{\boldsymbol{j}}' \tag{E6.5}$$

已知：

$$\dot{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{i},\ \dot{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{j}$$
$$\dot{\boldsymbol{i}}' = \boldsymbol{\omega}_U \times \boldsymbol{i}',\ \dot{\boldsymbol{j}}' = \boldsymbol{\omega}_U \times \boldsymbol{j}'$$

将式(6.11)和式(6.12)代入以上公式，得：

$$\dot{\boldsymbol{i}} = (p\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} = r\boldsymbol{j}$$
$$\dot{\boldsymbol{j}} = (p\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{j} = p\boldsymbol{k} - r\boldsymbol{i}$$

$$\dot{\boldsymbol{i}}' = r\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{i}' = r\boldsymbol{j}'$$

$$\dot{\boldsymbol{j}}' = r\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{j}' = -r\boldsymbol{i}'$$

由以上公式，式(E6.4)和式(E6.5)可重新写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_S = (\dot{u} - vr + h_s pr - cr^2)\boldsymbol{i} + (\dot{v} + ur - h_s\dot{p} + c\dot{r})\boldsymbol{j} + (vp + h_s p^2 + cpr)\boldsymbol{k} \tag{6.17}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_U = (\dot{u} - vr + er^2)\boldsymbol{i}' + (\dot{v} + ur - e\dot{r})\boldsymbol{j}' \tag{6.18}$$

2. 转动

一般而言，刚体绕其质心 C 的角动量 H_c 可写为

$$\begin{aligned} H_c &= I \times \omega \\ &= (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\boldsymbol{i} + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\boldsymbol{j} \\ &= (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

式中，I 为刚体绕 C 点的惯性张量；元素 I_{xx}、I_{xy}…是刚体绕过 C 点且分别平行于 x、y、z 轴的转动惯量或惯量积；ω_x、ω_y、ω_z 分别为刚体转动角速度 ω 在 x、y、z 方向的分量。

以式(6.11)给出的角速度 ω_s 转动的簧上质量质心处的动量矩 H_s 为

$$\boldsymbol{H}_S = \boldsymbol{I}_S \times \boldsymbol{\omega}_S = (I_{xxS}p - I_{xzS}r)\boldsymbol{i} + (-I_{zzS}p + I_{zzS}r)\boldsymbol{k} \tag{6.20}$$

式中，I_S 为簧上质量绕点 S 的惯性张量。考虑到簧上质量关于 xz 平面对称，故 $I_{yxS} = I_{yzS} = 0$

与上面相类似，以式(6.12)给出的角速度 ω_U 转动的簧下质量的动量矩 $\boldsymbol{H}_U$ 为

$$\boldsymbol{H}_U = I_{zzU} r\boldsymbol{k}' \tag{6.21}$$

式中，I_{zzU}为绕过 U 点且平行于 z'轴的转动惯量。

若簧下质量对称于 x'轴，且不计其高度，并认为质量分布于 $x'y'$ 平面内，故惯性积全为零。

运动刚体角动量的时间导数等于外力矩。通过对式(6.20)和式(6.21)进行时间求导，得：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{H}}_S = {} & (I_{xxS}\dot{p} - I_{xzS}\dot{r})\boldsymbol{i} + [I_{xzS}p^2 + (I_{xxS} - I_{zzS})pr - I_{xzS}r^2]\boldsymbol{j} \\ & + (-I_{zzS}\dot{p} + I_{zzS}\dot{r})\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_U = I_{zzU}\dot{r}\boldsymbol{k}' \tag{6.23}$$

由以上方程可知，绕过簧上质量 S 点且分别平行于 z 轴和 x 轴的横摆

力矩 N_s 和侧倾力矩 L_s 等于：

$$N_S = -I_{zxS}\dot{p} + I_{zzS}\dot{r}$$

$$L_S = I_{xxS}\dot{p} - I_{xzS}\dot{r}$$

绕过簧下质量 U 点且平行于 z' 轴的横摆力矩 N_U 为

$$N_U = I_{zzU}\dot{r}$$

综上所述，由于簧上、簧下质量的质心 S 和 U 分别作用有惯性力 Y_s、Y_U，整个车辆绕 z 或 z' 轴的横摆力矩 $\sum N$ 及绕 x 或 x' 轴的侧倾力矩 $\sum L$ 分别表达如下：

$$\begin{aligned}\sum N &= N_S + N_U + cY_S - eY_U \\ &= (I_{zzS} + I_{zzU} + m_S c^2 + m_U e^2)\dot{r} - (I_{zxS} + m_S h_s c)\dot{p} \\ &\quad + (m_S c - m_U e)V(\dot{\beta} + r) \\ &= I_z\dot{r} - I_{zx}\dot{p}\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}\sum L &= L_s - h_s Y_S \\ &= (I_{xxS} + m_S h_s^2)\dot{p} - (I_{xzS} + m_S h_s c)\dot{r} \\ &\quad + m_S h_s V(\dot{\beta} + r) \\ &= I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} - m_S h_s V(\dot{\beta} + r)\end{aligned} \tag{6.25}$$

这里 $|\phi| \ll 1$，并有：

$$I_z = I_{zzS} + I_{zzU} + m_S c^2 + m_U e^2$$

$$I_{zx} = I_{xz} = I_{xzS} + m_S h_s c$$

$$I_x = I_{xxS} + m_S h_s^2$$

式中，I_z 为整车绕过质心的垂向轴的横摆转动惯量，I_x 为簧上质量绕 x 轴的侧倾转动惯量。

6.4.3　外力

作用于车辆的外力是轮胎的侧向力。如 3.2 节所述，对运动中的车辆而言，其前、后轮作用具有正比于其侧偏角的侧向力。此外，当考虑车身的侧倾时，还作用有外倾侧向推力。建立考虑车身侧倾的运动方程时，这些力都必须包括在整车所受的外力中。

前、后轮的侧倾转向角分别为 α_f 和 α_r，若假定其与车身侧倾角成正比，故有

$$\alpha_f = \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\phi$$

$$\alpha_r = \frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi$$

式中，$\partial\alpha_f/\partial\phi$、$\partial\alpha_r/\partial\phi$ 分别为每单位车身侧倾角的前、后轮侧倾转向角，并相对正侧倾角时取正，即当产生逆时针方向的转向角时取正。

由于前轮除了前轮转角 δ 外，还额外多出了一个转向角变化量 α_f，同理，后轮也多了一个 α_r 转向角。同样以 3.2 节的假设为前提以及式(3.6)和式(3.7)，可得前、后轮胎的侧偏角分别为

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V}r - \delta - \alpha_f = \beta + \frac{l_f}{V}r - \delta - \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\phi$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V}r - \alpha_r = \beta - \frac{l_r}{V}r - \frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi$$

因此，作用于前、后轮胎的侧向力 $2Y_f$ 和 $2Y_r$ 分别为

$$2Y_f = -2K_f\beta_f = 2K_f\left(\delta + \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi} - \beta - \frac{l_f}{V}r\right)$$

$$2Y_r = -2K_r\beta_r = 2K_r\left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi - \beta + \frac{l_r}{V}r\right)$$

这里，我们忽略了由载荷转移引起的侧偏力的变化。

假设由车身侧倾引起的外倾角正比于车身侧倾角，则作用于前、后轮上的外倾侧向推力 $2Y_{cf}$、$2Y_{cr}$分别为

$$2Y_{cf} = -2K_{cf}\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi}\phi$$

$$2Y_{cr} = -2K_{cr}\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi}\phi$$

式中 K_{cf}、K_{cr}分别为前、后轮胎的外倾侧向推力系数；$\partial\phi_f/\partial\phi$、$\partial\phi_r/\partial\phi$ 分别为单位车身侧倾角所产生的前、后轮外倾角，且与车身侧倾同向时为正。

此时，还假定左、右轮产生相同方向、相同大小的外倾角。

如图 6.22 所示，在考虑车身侧倾情况下，作用于车辆的所有侧向外力，即 y 方向外力的合力，表示如下：

$$
\begin{aligned}
\sum F_y &= 2Y_f + 2Y_r + 2Y_{cf} + 2Y_{cr} \\
&= 2K_f\left(\delta + \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\phi - \beta - \frac{l_f}{V}r\right) + 2K_r\left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi - \beta + \frac{l_r}{V}r\right) \\
&\quad - 2K_{cf}\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi}\phi - 2K_{cr}\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi}\phi
\end{aligned} \tag{6.26}
$$

由其产生的、绕 z 轴的所有横摆力矩 $\sum M_z$ 则为

$$
\begin{aligned}
\sum M_z &= 2l_f Y_f - 2l_r Y_r + 2l_f Y_{cf} - 2l_r Y_{cr} \\
&= 2l_f K_f\left(\delta + \frac{\partial \alpha_f}{\partial \phi}\phi - \beta - \frac{l_f}{V}r\right) - 2l_r K_r\left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial \phi}\phi - \beta + \frac{l_r}{V}r\right) \\
&\quad - 2l_f K_{cf}\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi}\phi + 2l_r K_{cr}\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi}\phi
\end{aligned} \tag{6.27}
$$

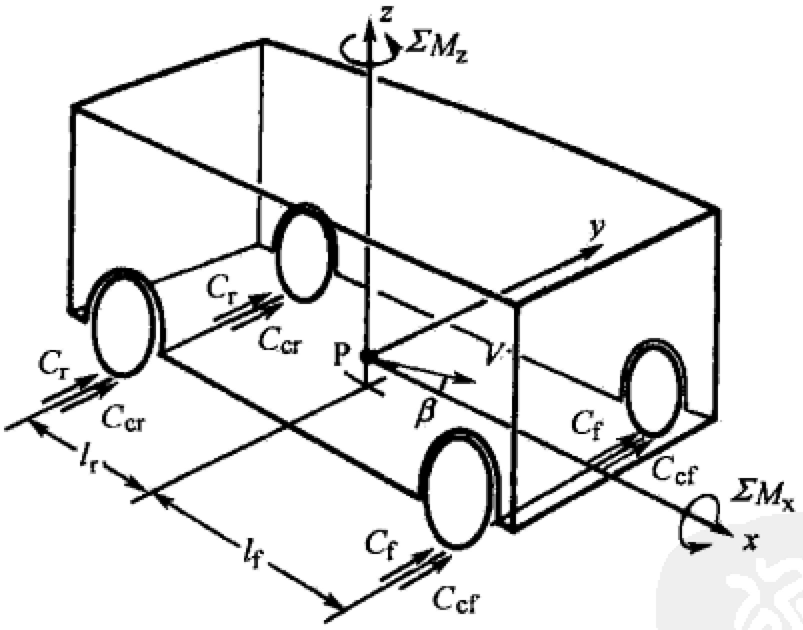


图 6.22　作用于车辆轮胎的外力

当车身发生侧倾时，它将受到来自悬架系统的弹簧和减振器反力。因而形成车身绕侧倾轴(即 x 轴)的侧倾力矩。由 6.2.2 小节可知，由弹簧引起的侧倾力矩为 $-K_\phi\phi$。假定由减振器引起的反力正比于侧倾角速度，则由此产生的侧倾力矩可表示为 $-C_\phi p$。其中，C_ϕ 为侧倾运动的等效阻尼系数，等于由前、后减振器产生的每单位侧倾角速度的力

矩之和。

车身发生侧倾时，重力 m_sg 也会绕 x 轴产生力矩，如图6.23所示。当侧倾角 ϕ 小时，该力矩近似为 $m_sgh_s\phi$。

因此，由作用于整个车辆的所有外力产生的绕 x 轴的侧倾力矩 $\sum M_x$ 等于：

$$\sum M_x = (-K_\phi + m_Sgh_s)\phi - C_\phi P \tag{6.28}$$

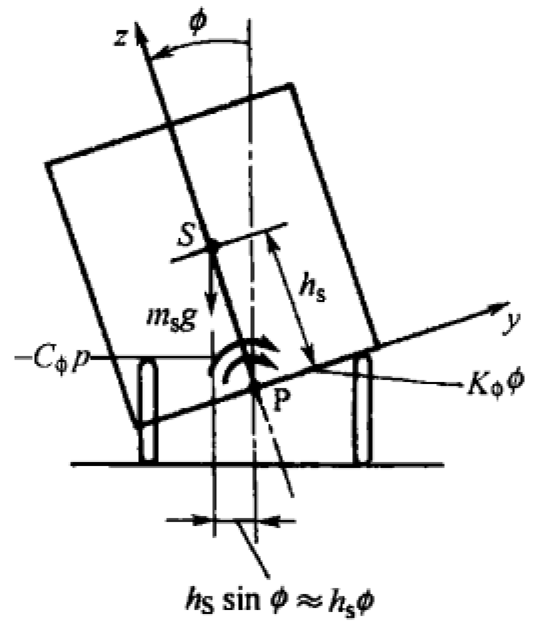


图6.23 作用于车身的侧倾力矩

6.4.4 运动方程

通过前面的讨论，已经清楚了车辆运动中发生侧倾时受到的外力和惯性力。现在，就可以通过由以下的平衡条件推导车辆的运动方程：

$$\sum Y - \sum F_y = 0 \text{(侧向力平衡)}$$

$$\sum N - \sum M_z = 0 \text{(横摆力矩的平衡)}$$

$$\sum L - \sum M_x = 0 \text{(侧倾力矩的平衡)}$$

将式(6.19)、式(6.24)~式(6.28)分别代入以上平衡条件，则可以得到包括车身侧倾的车辆运动方程如下。

$$mV\left(\frac{d\beta}{dt}+r\right) - m_Sh_s\frac{d^2\phi}{dt^2} = 2K_f\left(\delta+\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}\phi-\beta-\frac{l_f}{V}r\right)+2K_r\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}\phi-\beta+\frac{l_r}{V}r\right)-2\left(K_{cf}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}\phi+K_{cr}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\phi\right) \tag{6.29}$$

$$I\frac{dr}{dt}-I_{xz}\frac{d^2\phi}{dt^2} = 2K_f\left(\delta+\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}\phi-\beta-\frac{l_f}{V}r\right)l_f-2K_r\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}\phi-\beta+\frac{l_r}{V}r\right)l_r-2\left(l_fK_{cf}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}\phi-l_rK_{cr}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\phi\right) \tag{6.30}$$

$$I_\phi\frac{d^2\phi}{dt^2}-I_{xz}\frac{dr}{dt}-m_Sh_sV\left(\frac{d\beta}{dt}+r\right) = (-K_\phi+m_Sgh_s)\phi-C_\phi\frac{d\phi}{dt} \tag{6.31}$$

式中，$d\phi/dt=p$，且采用 I、I_ϕ 分别代替了 I_z、I_{xx}；I 是整个车辆的

横摆转动惯量；I_ϕ 为侧倾轴与 x 轴一致时，车身绕侧倾轴的侧倾转动惯量。

整理后，得：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V}\right]r-m_Sh_s\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}-2Y_\phi\phi$$
$$=2K_f\delta \tag{6.29'}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r-I_{xz}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}-2N_\phi\phi=2l_fK_f\delta \tag{6.30'}$$

$$-m_Sh_sV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}-I_{xz}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-m_Sh_sV_r+I_\phi\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+C_\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+(K_\phi-m_Sgh_s)\phi=0 \tag{6.31'}$$

其中，

$$Y_\phi=\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}K_f+\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}K_r\right)-\left(\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}K_{cf}+\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}K_{cr}\right) \tag{6.32}$$

$$N_\phi=\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}l_fK_f-\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}l_rK_r\right)-\left(\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}l_fK_{cf}-\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}l_rK_{cr}\right) \tag{6.33}$$

这就是具有车身侧倾的车辆运动方程。这里，忽略了由于左右轮载荷转移引起的侧倾阻力变化，且假定其效应对车辆横摆运动影响较小。

对式(6.29′)～式(6.31′)进行拉普拉斯变换，求得车辆的特性方程如下：

$$\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{V} & -m_Sh_ss^2-2Y_\phi \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} & -I_{xz}s^2-2N_\phi \\ -m_Sh_sVs & -I_{xz}s-m_Sh_sV & I_\phi s^2+C_\phi s+(K_\phi-m_Sgh_s) \end{vmatrix}=0 \tag{6.34}$$

由于上述特征方程形式有点复杂，故假设：

$$K_f\approx K_r\approx K$$

$$l_f\approx l_r\approx\frac{l}{2}$$

$$I \approx ml_f l_r \approx m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

并忽略惯性积，即

$$K_\phi - m_S g h_s \approx K_\phi$$
$$I_{xz} \approx 0$$

于是，特征方程简化为

$$\begin{vmatrix} mVs+4K & mV & -m_S h_s s^2 - 2Y_\phi \\ 0 & m\left(\frac{l}{2}\right)^2 s + \frac{Kl^2}{V} & -2N_\phi \\ -m_S h_s Vs & -m_S h_s V & I_\phi s^2 + C_\phi s + K_\phi \end{vmatrix} = 0 \quad (6.34')$$

将其展开并整理，得：

$$A_4 s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0$$

其中，

$$A_0 = \frac{16K^2 K_\phi}{mV} - \frac{32 m_S h_s K N_\phi}{ml^2} V$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 8K\left(K_\phi - \frac{m_S h_s Y_\phi}{m}\right) + \frac{16K^2 C_\phi}{mV} \\ A_2 &= (mK_\phi - 2m_S h_s Y_\phi)V + 8KC_\phi + \frac{16K^2 I_\phi}{mV} \\ A_3 &= mC_\phi V + 4K\left(2I_\phi - \frac{m_S^2 h_s^2}{m}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6.35)$$

$$A_4 = m\left(I_\phi - \frac{m_S^2 h_s^2}{m}\right)V$$

6.5 侧倾对车辆动力学的影响

上节中，我们推导了考虑车身侧倾的车辆运动方程。对分析车辆运动特性来说，该运动方程的表达形式仍过于复杂。因此，为了考察车身侧倾对车辆运动的基本影响，Ellis[3]导出考虑等效侧倾效应的两个自由度(侧偏和横摆)运动方程。这一做法仅仅是通过考虑由恒定侧向加速度引起的车身侧倾。

根据式(6.31)，稳态车身侧倾角由如下假设推导：

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=0$$

于是，得到的车辆侧倾角为

$$\phi=\frac{m_S h_s V}{K_\phi - m_S g h_s} r \tag{6.36}$$

改写具有稳态侧倾角的式(6.29)、式(6.30)的右边，得：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=2K_f\left[\delta-\beta-\frac{l_f}{V}r+\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}-\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}\right)\phi\right]+2K_r\left[-\beta+\frac{l_r}{V}r+\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\right)\phi\right]$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2K_f\left[\delta-\beta-\frac{l_f}{V}r+\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}-\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}\right)\phi\right]l_f-2K_r\left[-\beta+\frac{l_r}{V}r+\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\right)\phi\right]l_r$$

如式(6.36)给出，式中的 ϕ 正比于 r，于是上述方程等价于：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=2K_f\left(\delta-\beta-\frac{l_f'}{V}r\right)+2K_r\left(-\beta+\frac{l_r'}{V}r\right) \tag{6.37}$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2K_f\left(\delta-\beta-\frac{l_f'}{V}r\right)l_f+2K_r\left(-\beta+\frac{l_r'}{V}r\right)l_r \tag{6.38}$$

其中，

$$l_f'=l_f(1+B_f V^2) \tag{6.39}$$

$$l_r'=l_r(1+B_r V^2) \tag{6.40}$$

$$B_f=\frac{-m_S h_s\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}-\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}\right)}{l_f(K_\phi-m_S g h_s)}$$

$$B_r=\frac{m_S h_s\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\right)}{l_r(K_\phi-m_S g h_s)}$$

通过将式(6.37)和式(6.38)与式(3.10)和式(3.11)进行比较，可清楚地看出：考虑车身侧倾的车辆等效侧偏运动和横摆运动，相当于车辆质心至前、后轴的距离 l_f、l_r 等效地变成了 l_f'、l_r'。

改写式(6.37)和式(6.38)，则具有车身侧倾的等效两自由度车辆运动方程可表达如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2(l'_fK_f-l'_rK_r)}{V}\right]r=2K_f\delta \quad (6.37')$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l'_fl_fK_f+l'_rl_rK_r)}{V}r=2l_fK_f\delta \quad (6.38')$$

在稳态转向中，可将 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$ 代入式(6.37′)、式(6.38′)。因而，得到对恒定前轮转角 δ 的横摆角速度 r 响应，如下：

$$r=\frac{1}{1-\dfrac{ml_fK_f-l_rK_r}{2l(l'_f+l'_r)K_fK_r}V^2}\frac{V}{(l'_f+l'_r)}\delta \quad (6.41)$$

由式(6.39)和式(6.40)，有

$$l'_f+l'_r=l(1+BV^2) \quad (6.42)$$

其中，

$$B=\frac{l_fB_f+l_rB_r}{l}=\frac{m_Sh_s}{l(K_\phi-m_Sgh_s)}\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}+\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}-\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\phi}\right) \quad (6.43)$$

将式(3.42)、式(6.42)和式(6.43)代入式(6.41)，得：

$$r=\frac{1}{1+\dfrac{AV^2}{1+BV^2}}\frac{1}{1+BV^2}\frac{V}{l}\delta=\frac{1}{1+A'V^2}\frac{V}{l}\delta \quad (6.44)$$

式中，A'是考虑了侧倾时的等效稳定性因子。

$$\begin{aligned}A'&=A+B\\&=-\frac{m(l_fK_f-l_rK_r)}{2l^2K_fK_r}+\frac{m_Sh_s}{l(K_\phi-m_Sgh_s)}\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}+\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\phi_f}{\partial\phi}-\right.\\&\left.\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\phi_r}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \quad (6.45)$$

由上可知，若 $B>0$，即

$$\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}+\frac{K_{cf}}{K_f}\frac{\partial\alpha_f}{\partial\phi}-\frac{K_{cr}}{K_r}\frac{\partial\alpha_r}{\partial\phi}\right)>0$$

则车身侧倾效应使车辆转向特性向不足转向趋势变化。更准确地说，后轮正的侧倾转向和前轮正的外倾变化、或者是前轮负的侧倾转向和

后轮负的外倾变化，能够使车辆转向特性偏向不足转向。

以一个具有后轮侧倾转向特性的普通轿车为例，图 6.24 表明车辆在稳态转向运动中，其横摆角速度 r 和行驶速度 V 的关系随车辆质心至前轴距离的变化情况。不管质心至前轴的距离如何，后轮侧倾转向角总是设定在能够使车辆的转向特性不是 NS、就是 US 特性的情况下。

该图还表明了，对于没有车身侧倾时的两自由度模型而言，其横摆角速度 r 与行驶速度 V 的关系。该图表明，在引入后轮侧倾转向角后，不仅车辆的转向特性偏向不足转向，而且车辆质心与前轴距离的变动对转向特性的影响也变小了。

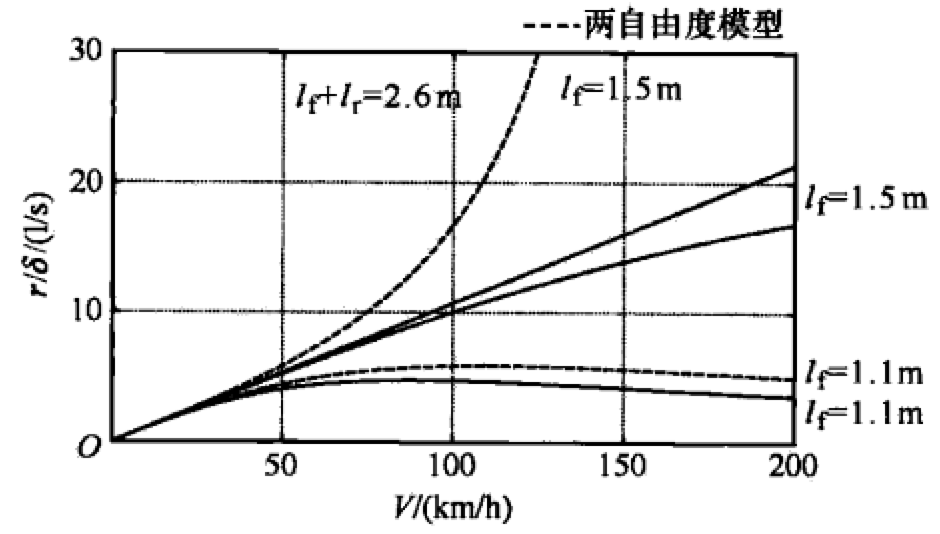


图 6.24　侧倾转向对稳态转向的影响

对式(6.37′)和式(6.38′)进行拉普拉斯变换，得到车辆的特征方程的表达通式如下：

$$s^2+2D's+P'^2=0 \tag{6.46}$$

其中，

$$2D'=\frac{2m(l'_f l_f K_f+l'_r l_r K_r)+2I(K_f+K_r)}{mIV}=2D+\frac{2(l_f^2K_fB_f+l_r^2K_rB_r)V}{I} \tag{6.47}$$

$$P'^2=\frac{4K_fK_rl(l'_f+l'_r)}{mIV^2}-\frac{2(l_fK_f-l_rK_r)}{I}=P^2+\frac{4K_fK_rl^2}{mI}B \tag{6.48}$$

$2D$ 和 P^2 是未考虑侧倾时，式(3.56)和式(3.57)给出的系数。因此，令 $I=mk^2$、并根据式(3.67)，考虑侧倾的车辆的固有频率 ω'_n 为

$$\omega_n' = P' = \sqrt{P + \frac{4K_fK_rl^2}{mI}B}$$
$$= \sqrt{\frac{4K_fK_rl^2}{m^2k^2}\left(\frac{1+AV^2}{V^2}\right) + \frac{4K_fK_rl^2}{m^2k^2}B} \tag{6.49}$$
$$= \frac{2\sqrt{K_fK_r}l}{mk}\frac{\sqrt{1+A'V^2}}{V}$$

假定 $l_f \approx l_r$、$K_f \approx K_r$，考虑侧倾的阻尼比 ζ' 为

$$\zeta' = \frac{D'}{P'} = \left(\frac{1+k^2/l_fl_r}{2\sqrt{k^2/l_fl_r}} + \frac{1}{2\sqrt{k^2/l_fl_r}}BV^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+A'V^2}} \tag{6.50}$$

习题

6.1　有时将车辆受到 0.5g 的稳态侧向加速度的侧倾角定义为侧倾率。已知车身质量 $m_s = 1400$kg，自地面的车辆质心高度 $h_s = 0.52$m，前轴侧倾刚度 $K_{\phi f} = 65.0$kN · m/rad，后轴侧倾刚度 $K_{\phi r} = 35.0$kN · m/rad，试计算车辆的侧倾率。

6.2　分别计算车辆前、后悬架的侧向载荷转移。除采用习题 6.1 中的参数外，还已知参数如下：前轮到质心的距离 $l_f = 1.1$m，后轮到质心的距离 $l_r = 1.6$m，前轮轮距 $d_f = 1.5$m，后轮轮距 $d_r = 1.5$m。

6.3　已知原有的轮胎侧偏刚度为 60kN/rad，每单位侧向力产生的变形转向角为 0.00185rad/kN，试求悬架的变形转向相当于使轮胎侧偏刚度减少的百分比。

6.4　若使外倾变化与侧倾转向对车辆转向特性的影响相同，试求外倾变化率与侧倾转向率的相对值。

6.5　使图 6.24 中的车辆由过度转向变为中性转向时，试求后悬架的侧倾转向率。

参考文献

[1]　R. Eberan, ROLL ANGELS, The calculation of wheels loads and

angular movement on curves, Automobile Engineers, October, 1951.

[2] L. Segel, Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control, Proceedings of IMechE (AD), 1956-1957.

[3] J. R. Ellis, Vehicle dynamics, London Business Book Ltd., London, 1969.

PDG

第 7 章　驱动和制动时的车辆运动

7.1　引言

至今为止，车辆运动的讨论只限于恒定前进车速的情况，而并没有考虑车辆的驱动和制动。但是，相对于其他交通工具，本书研究的课题是地面车辆在行驶时会更加频繁地在纵向上加速或减速。

因此，在本章中会重新考虑驱动和制动情况下的车辆运动基本特性。特别是当车辆以高速行驶时，如果由驱动和制动引起的车速变化较小，则可以分析驱动和制动时车辆的运动。

7.2　包含纵向运动的运动方程

由 3.2.1 小节可知，当车辆在水平面内运动时，其质心 P 处的加速度矢量可由式(3.3)表示：

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = (\dot{u} - vr)\boldsymbol{i} + (\dot{v} + ur)\boldsymbol{j} \tag{3.3}$$

尽管 v 相对 u 较小(如前所述)，但是 u 并非一定为常数。因此，用 β 来描述车辆运动不一定总是很方便，而最好用 $\dot{u} - vr$、$\dot{v} + ur$ 来分别表示车辆纵向和侧向的加速度。

采用与 3.2.1 节中相同的假设，则在基础平面上包含纵向运动的车辆运动方程可由下式表示：

$$m\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - vr\right) = 2X_f + 2X_r \tag{7.1}$$

$$m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ur\right) = 2Y_f + 2Y_r \tag{7.2}$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2(l_f Y_f - l_r Y_r) \tag{3.5''}$$

式中，X_f、X_r为沿纵向作用于轮胎的力。

由 2.4 节中的讨论可知，它们主要取决于轮胎的纵向滑移率，并独立于车辆的平面运动。Y_f、Y_r则取决于轮胎侧偏角，当轮胎侧偏角较小时，它们可以式(3.8)和式(3.9)表示，在这种情况下，轮胎侧偏角为$\beta \approx v/u(u >> v)$。此外，如 2.3 或 2.4 节所述，作用于轮胎的侧向力 Y_f和 Y_r取决于纵向力 X_f和 X_r。

这样看来，通过直接求解和分析式(7.1)、式(7.2)和式(3.5′)的初始形式，来研究包含纵向运动的车辆运动基本特性是不可行的。

7.3　车辆的准稳态转向

如前一节所述，通过直接求解运动方程的方式来分析车辆的包括纵向运动的基本运动特性是不可行的，因而需要相应的变形。

当车辆稳态转向并且驱动力和制动力保持不变时，车速将发生变化，因此稳态条件不能得到满足。如果间隔时间很短，则由驱动力和制动力引起的车速变化可以忽略，例如当车辆高速行驶时，可以假设以固定纵向和侧向加速度进行稳态转向，这里称之为准稳态转向。

这种类型的转向情况在现实中确实存在。车辆在有坡度的曲线路面上以固定车速转向并同时驱动/制动就是一个例子。在此情况下，车辆是可能一边驱动/制动，一边稳态转向的。

7.3.1　驱动/制动时对稳定性因子的扩展

1. 转向时的轮胎侧偏角

质量为 W 的车辆，其转向过程中伴有驱动/制动，同以前章节一样定义它的侧向加速度为 $\ddot{y}$，则平衡方程为

$$W\ddot{y} = (K_{f1} + K_{f2})\beta_f + (K_{r1} + K_{r2})\beta_r \qquad (7.3)$$

$$l_f(K_{f1} + K_{f2})\beta_f - l_r(K_{r1} + K_{r2})\beta_r = 0 \qquad (7.4)$$

式中，β_f 和 β_r 为前、后轮的侧偏角；K_{f1} 和 K_{f2}为前左、前右轮胎的侧偏刚度；K_{r1} 和 K_{r2}为后左、后右轮胎的侧偏刚度。

在以下的讨论中，为区别左、右轮胎的不同特性，我们分别用下标 1 表示左轮，2 表示右轮。

轮胎的侧偏刚度取决于轮胎载荷，如果载荷转移对侧偏刚度的影响较小，则可视为一阶。侧向力和驱动力/制动力的关系可用式(2.40)近似表示。并且，如果驱动力/制动力相对于轮胎载荷较小，则可以用一个简单的抛物线函数模拟表示。基于这些简化，侧偏刚度在很小的侧偏角时可以用下式表示，例如对于前轮有

$$K_{f1} \approx \left[K_{f0} + \frac{\partial K_f}{\partial W}\left(-\Delta W_f - \frac{\Delta W}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2\right]$$

式中，ΔW_f 是转向时前轴的载荷转移；ΔW 是由驱动力/制动力引起的前后轴之间的载荷转移；W_f 是前轴的垂直载荷；μ 是轮胎和路面之间的摩擦系数。

对于较小的纵向和侧向加速度情况，

$$\frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W_f}{K_{f0}},\ \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W}{K_{f0}},\ \left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2$$

它们被视为相同数量级的微小量，并有

$$K_{f1} = K_{f0}\left[1 - \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W_f}{K_{f0}} - \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{f0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2\right] \tag{7.5}$$

$$K_{f2} = K_{f0}\left[1 + \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W_f}{K_{f0}} - \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{f0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2\right] \tag{7.6}$$

$$K_{r1} = K_{r0}\left[1 - \frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{\Delta W_r}{K_{f0}} + \frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{r0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_r}{\mu W_r}\right)^2\right] \tag{7.7}$$

$$K_{r2} = K_{r0}\left[1 + \frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{\Delta W_r}{K_{r0}} + \frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{r0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_r}{\mu W_r}\right)^2\right] \tag{7.8}$$

式中，ΔW_r是后轴的载荷转移量；W_r是后轴的垂直载荷。

由上述分析可知，通过分别叠加左、右轮的侧偏刚度可以得到前、后轴的等效侧偏刚度，即

$$2K_f^* = K_{f1} + K_{f2} = 2K_{f0}\left[1 - \frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{f0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2\right] \tag{7.9}$$

$$2K_r^* = K_{r1} + K_{r2} = 2K_{r0}\left[1 + \frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{r0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2X_r}{\mu W_r}\right)^2\right] \tag{7.10}$$

根据式(7.3)和式(7.4)，并对式(7.9)和式(7.10)采用与上述相同的微小量假设，求得 β_f 和 β_r 如下：

$$\beta_{\mathrm{f}} \approx \frac{l_{\mathrm{r}}W}{2lK_{\mathrm{f0}}}\left[1+\frac{\partial K_{\mathrm{f}}}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{\mathrm{f0}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2X_{\mathrm{f}}}{\mu W_{\mathrm{f}}}\right)^{2}\right]\ddot{y} \tag{7.11}$$

$$\beta_{\mathrm{r}} \approx \frac{l_{\mathrm{f}}W}{2lK_{\mathrm{r0}}}\left[1-\frac{\partial K_{\mathrm{r}}}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{\mathrm{r0}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2X_{\mathrm{r}}}{\mu W_{\mathrm{r}}}\right)^{2}\right]\ddot{y} \tag{7.12}$$

式中，$W_{\mathrm{f}}=l_{\mathrm{r}}W/l$；$\Delta W=hW\ddot{x}/l$；$X_{\mathrm{f}}=\alpha_{\mathrm{c}}W\ddot{x}/2$；$X_{\mathrm{r}}=(1-\alpha_{\mathrm{c}})W\ddot{x}/2$；$\alpha_{\mathrm{c}}$ 为前后驱动力/制动力分配系数；$\ddot{x}$ 为由驱动力/制动力引起的纵向加速度(单位为 g)；h 为车辆质心距地面的高度。

分别将它们代入式(7.11)和式(7.12)，可得：

$$\beta_{\mathrm{f}} \approx \frac{l_{\mathrm{r}}W}{2lK_{\mathrm{f0}}}\left[1+\frac{hW}{2lK_{\mathrm{f0}}}\frac{\partial K_{\mathrm{f}}}{\partial W}\ddot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{c}}l}{\mu l_{\mathrm{r}}}\right)^{2}\ddot{x}^{2}\right]\ddot{y} \tag{7.13}$$

$$\beta_{\mathrm{r}} \approx \frac{l_{\mathrm{f}}W}{2lK_{\mathrm{r0}}}\left[1-\frac{hW}{2lK_{\mathrm{r0}}}\frac{\partial K_{\mathrm{r}}}{\partial W}\ddot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{(1-\alpha_{\mathrm{c}})l}{\mu l_{\mathrm{f}}}\right)^{2}\ddot{x}^{2}\right]\ddot{y} \tag{7.14}$$

此外，若以 $\ddot{x}$ 表示式(7.9)和式(7.10)中的等效侧偏刚度，则有

$$2K_{\mathrm{f}}^{*} \approx 2K_{\mathrm{f0}}\left[1+\frac{hW}{2lK_{\mathrm{f0}}}\frac{\partial K_{\mathrm{f}}}{\partial W}\ddot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{c}}l}{\mu l_{\mathrm{r}}}\right)^{2}\ddot{x}^{2}\right] \tag{7.9'}$$

$$2K_{\mathrm{r}}^{*} \approx 2K_{\mathrm{r0}}\left[1-\frac{hW}{2lK_{\mathrm{r0}}}\frac{\partial K_{\mathrm{r}}}{\partial W}\ddot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{(1-\alpha_{\mathrm{c}})l}{\mu l_{\mathrm{f}}}\right)^{2}\ddot{x}^{2}\right] \tag{7.10'}$$

2. 转向中的前束角变化和变形转向

在 5.3 和 6.3 节中，我们已经研究了轮胎前束角变化及变形转向对水平面内运动的车辆的影响，现在将对具有驱动/制动的转向车辆研究这些影响。

如果车辆同时具有纵向和侧向加速度 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{y}$，则车身将发生俯仰和侧倾。这将导致悬架行程的变化。设车辆的俯仰、侧倾轴均在地面上，俯仰运动引起的前轮的前束角变化为$(\partial\alpha_{\mathrm{f}}/\partial z)(l_{\mathrm{f}}hw\ddot{x}/K_{\theta})$。类似地，由侧倾运动导致的前束角变化为$(\partial\alpha_{\mathrm{f}}/\partial z)(d_{\mathrm{f}}hw\ddot{y}/2K_{\phi})$。其中，$\partial\alpha_{\mathrm{f}}/\partial z$ 为单位悬架行程内的前束角变化；d_{f} 为前轮轮距；K_{θ} 为俯仰刚度；K_{ϕ} 为侧倾刚度。

另外，由轮胎侧倾力 $2Y_{\mathrm{f}}=l_{\mathrm{r}}W\ddot{x}$ 以及纵向力 $X_{\mathrm{f}}=\alpha_{\mathrm{c}}W\ddot{y}$ 引起的施加于转向系的力矩 T_{s}作用于前轮，大小为

$$T_{\mathrm{s}}=2\xi Y_{\mathrm{f}}+\frac{Y_{\mathrm{f}}}{K_{\mathrm{y}}}2X_{\mathrm{f}}=\left(\xi+\frac{\alpha_{\mathrm{c}}W}{2K_{\mathrm{y}}}\ddot{x}\right)\frac{l_{\mathrm{r}}W}{l}\ddot{y} \tag{7.15}$$

式中，K_y 为侧向刚度；ξ 为轮胎拖距和主销后倾拖距之和。

作用力分布如图 7.1 所示。

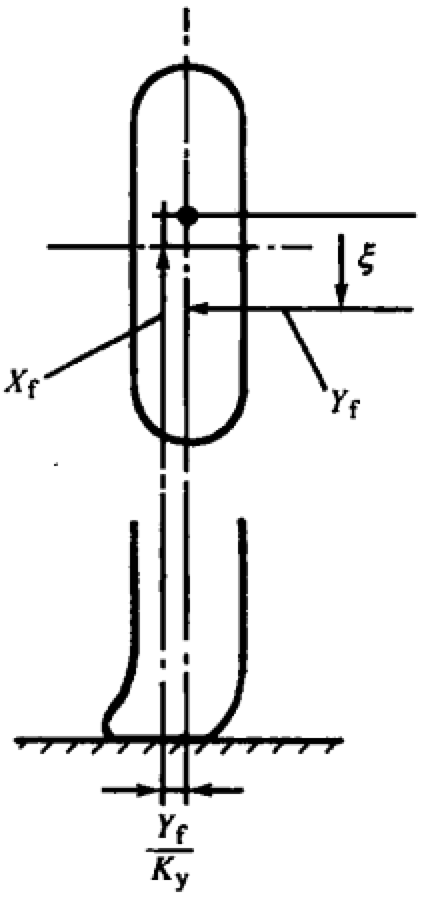


图 7.1　侧向力和纵向力引起的转向力矩

由上述分析得知，对每个车轮来说，其前束角变化与变形转向之和可分别表示如下：

$$\alpha_{f1}=\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{l_f hW}{K_\theta}\ddot{x}+\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{d_f hW}{2K_\phi}\ddot{y}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial X}\frac{\alpha_c W}{2}\ddot{x}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial T}\left(\xi+\frac{\alpha_c W}{2K_y}\ddot{x}\right)\frac{l_r W}{l}\ddot{y} \tag{7.16}$$

$$\alpha_{f2}=-\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{I_f hW}{K_\theta}\ddot{x}+\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{d_f hW}{K_\phi}\ddot{y}+\frac{\partial\alpha_f}{\partial X}\frac{\alpha_c W}{2}\ddot{x}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial T}\left(\xi+\frac{\alpha_c W}{2K_y}\ddot{x}\right)\frac{l_r W}{l}\ddot{y} \tag{7.17}$$

$$\alpha_{r1}=-\frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{I_f hW}{K_\theta}\ddot{x}+\frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{d_r hW}{2K_\phi}\ddot{y}-\frac{\partial\alpha_r}{\partial X}\frac{(1-\alpha_c)W}{2}\ddot{x} \tag{7.18}$$

$$\alpha_{r2}=\frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{I_r hW}{K_\theta}\ddot{x}+\frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{d_r hW}{2K_\phi}\ddot{y}+\frac{\partial\alpha_r}{\partial X}\frac{(1-\alpha_c)W}{2}\ddot{x} \tag{7.19}$$

式中，$\partial\alpha_f/\partial X$ 和 $\partial\alpha_r/\partial X$ 分别为前、后悬架系统单位纵向力的变形转向角；$\partial\alpha_f/\partial T$ 是转向系单位转向力矩的变形转向角；α_c 为前后驱动/制动力分配率。

由式(7.5)、式(7.6)、式(7.16)和式(7.17)可得由前束角变化引起的前轮转向力为

$$\begin{aligned}&K_{f1}\alpha_{f1}+K_{f2}\alpha_{f2}\\&=2K_{f0}\left[1-\frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W}{2K_{f0}}-\frac{1}{2}\left(\frac{2X_f}{\mu W_f}\right)^2\right]\\&\quad\times\left[\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{d_f hW}{2K_\phi}\ddot{y}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial T}\left(\xi+\frac{\alpha_c W}{2K_y}\ddot{x}\right)\frac{l_r W}{l}\ddot{y}\right]\\&\quad-2K_{f0}\left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{l_f hW}{K_\theta}\ddot{x}-\frac{\partial\alpha_f}{\partial X}\frac{\alpha_c W}{2}\ddot{x}\right)\frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{\Delta W_f}{K_{f0}}\end{aligned}$$

$$\approx 2K_f^* \left[\frac{\partial \alpha_f}{\partial z} \frac{d_f h W}{2K_\phi} \ddot{y} - \frac{\partial \alpha_f}{\partial T} \left(\xi + \frac{\alpha_c W}{2K_y} \ddot{x} \right) \frac{l_r W}{l} \ddot{y} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial z} \frac{l_f h W}{K_\theta} \ddot{x} - \frac{\partial \alpha_f}{\partial X} \frac{\alpha_c W}{2} \ddot{x} \right) \frac{\partial K_f}{\partial W} \frac{\Delta W_f}{K_{f0}} \right] = 2K_f^* \alpha_f \tag{7.20}$$

类似地，对于后轮有

$$K_{r1} \alpha_{r1} + K_{r1} \alpha_{r2}$$

$$\approx 2K_r^* \left[\frac{\partial \alpha_r}{\partial z} \frac{d_r h W}{2K_\phi} \ddot{y} + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial z} \frac{l_r h W}{2K_\phi} \ddot{x} + \frac{\partial \alpha_r}{\partial X} \frac{1 - \alpha_c}{2} W \ddot{x} \right) \frac{\partial K_r}{\partial W} \frac{\Delta W_r}{K_{r0}} \right]$$

$$= 2K_r^* \alpha_r \tag{7.21}$$

其中，如先前一样，对较小的纵向和侧向加速度来说，省略了 2 阶及以上的微小量。

在上述推导式(7.20)和式(7.21)的过程中，是通过分别将前后轮的前束角变化和变形转角，即(α_{f1}, α_{f2})和(α_{r1}, α_{r2})，以单一的等效转角，即(α_f 和 α_r)的代替形式实现的。由于侧向加速度产生的左、右轮转向同向，那么可以认为左、右轮转向产生的总侧向力分别作用于车辆的前部和后部。相反，由纵向加速度产生的转向方向相反，由左、右轮载荷转移导致的作用力差值则只能认为作用于前部和后部。以上结论建立在式(7.9)和式(7.10)定义的轮胎侧偏刚度基础上。

由式(6.4)和式(6.5)，可得：

$$\Delta W_f = \frac{hWK_{\phi f}}{d_f K_\phi} \ddot{y}$$

$$\Delta W_r = \frac{hWK_{\phi r}}{d_r K_\phi} \ddot{y}$$

如果前、后侧倾中心均位于地面，则前、后轮的等效转角 α_f 和 α_r 可分别表示为

$$\alpha_f = (a_f + b_f \ddot{x}) \ddot{y} \tag{7.22}$$

$$\alpha_r = (a_r + b_r \ddot{x}) \ddot{y} \tag{7.23}$$

其中，

$$a_f = \frac{\partial \alpha_f}{\partial z} \frac{d_f h W}{2K_\phi} - \frac{\partial \alpha_f}{\partial T} \xi \frac{l_r W}{l} \tag{7.24}$$

$$b_f = \left(\frac{\partial\alpha_f}{\partial X}\frac{\alpha_c W}{2} - \frac{\partial\alpha_f}{\partial z}\frac{l_f hW}{K_\phi}\right)\frac{\partial K_f}{\partial W}\frac{hWK_{\phi f}}{d_f K_\phi K_{f0}} - \frac{\partial\alpha_f}{\partial T}\frac{\alpha_c W}{2K_y}\frac{l_r W}{l} \quad (7.25)$$

$$a_r = \frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{d_r hW}{2K_\phi} \quad (7.26)$$

$$b_r = \left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial X}\frac{1-\alpha_c}{2}W + \frac{\partial\alpha_r}{\partial z}\frac{l_r hW}{K_\theta}\right)\frac{\partial K_r}{\partial W}\frac{hWK_{\phi r}}{d_r K_\phi K_{r0}} \quad (7.27)$$

3. 对稳定性因子的扩展

一旦给定了前、后轮的侧偏角和转向角，则前轮转角 δ 与转向半径 ρ 之间的关系则为

$$\delta = \frac{l}{\rho} + \beta_f - \beta_r + \alpha_r - \alpha_f{}^{\ominus} \quad (6.6')$$

将式(7.13)、式(7.14)、式(7.22)和式(7.23)代入式(6.6′)，得：

$$\delta = \frac{l}{\rho} + (A_0 + A_1\ddot{x} + A_2\ddot{x}^2)gl\ddot{y} \quad (7.28)$$

又因为 $g\ddot{y} = V^2/\rho$，故有

$$\rho = \frac{l}{\delta}[1 + (A_0 + A_1\ddot{x} + A_2\ddot{x}^2)V^2] \quad (7.29)$$

其中，

$$A_0 = \frac{W}{2l^2 g}\left(\frac{l_r K_{r0} - l_f K_{f0}}{K_{f0}K_{r0}}\right) + \frac{\alpha_r - \alpha_f}{gl} \quad (7.30)$$

$$A_1 = \frac{hW^2}{4l^3 g}\left(\frac{l_r}{K_{f0}^2}\frac{\partial K_f}{\partial W} + \frac{l_f}{K_{r0}^2}\frac{\partial K_r}{\partial W}\right) + \frac{b_r - b_f}{gl} \quad (7.31)$$

$$A_2 = \frac{W}{4\mu^2 g}\left[\frac{\alpha_c^2}{l_r K_{f0}} - \frac{(1-\alpha_c^2)}{l_f K_{r0}}\right] \quad (7.32)$$

式(7.28)给出了车辆以某一侧向加速度转向并同时驱动/制动，其转向半径为 ρ 时所需的前轮转角 δ，式(7.29)则给出了其转向半径和车速的关系。于是，我们则将下式，

$$A^* = A_0 + A_1\ddot{x} + A_2\ddot{x}^2 \quad (7.33)$$

定义为扩展到车辆驱动/制动情况时的转向稳定性因子。

⊖ 原文为 $\delta = \frac{l}{\rho} + \beta_f - \beta_r + \alpha_f - \alpha_r$，但与 P180(6.6)′矛盾，故统一。

其中，第一项 A_0 相当于式(3.43)定义的稳态转向稳定性因子，第二项 A_1 则是由驱动/制动引起的载荷转移、前束角变化以及变形转向所导致。第三项 A_2 则是由驱动力/制动力变化产生的轮胎转向特性所产生的，并与纵向加速度 $\ddot{x}$ 的平方成正比。

7.3.2 驱动和制动对转向的影响

通过对式(7.28)进行变形，并设 $\ddot{x}=\ddot{x}_0$、$\delta=\delta_0$、$\rho_0=l/\delta_0$，则有

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{1-(A_0+A_1\ddot{x}_0+A_2\ddot{x}_0^2)\rho_0 g\ddot{y}} \tag{7.34}$$

该式即为当车辆以固定加速度和转向角转向时，其转向半径与侧向加速度的关系。同样，当 $V=V_0$ 时，由式(7.29)可得：

$$\rho=\rho_0[1+(A_0+A_1\ddot{x}+A_2\ddot{x}^2)V_0^2] \tag{7.29'}$$

它表示了车辆以固定转向角进行稳态转向并同时驱动/制动时，转向半径如何随纵向加速度的变化而变化。但前提是假设车速很高，且由驱动/制动导致的车速变化可忽略不计。这里，由式(7.29′)可得：

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\ddot{x}}\right)_{\ddot{x}=0}=\rho_0 V^2 A_1 \tag{7.35}$$

其中式(7.31)中的 A_1 定义为转向过程中纵向加速度敏感系数，可用来估计 $\ddot{x}$ 较小时驱动/制动对转向的主要影响。

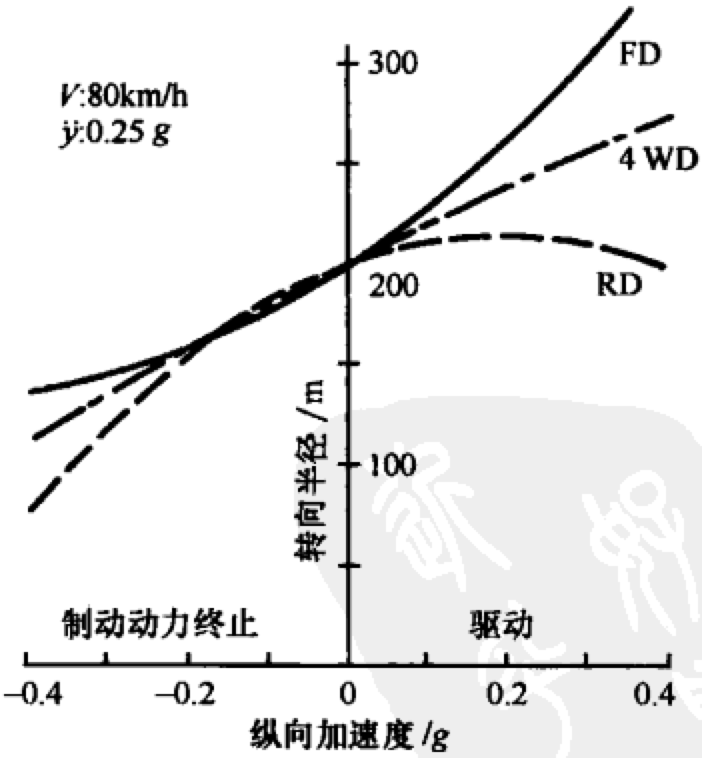


图7.2 稳态转向时纵向加速度的影响

图7.2表示驱动和制动动力终止时对转向半径的影响。若忽略由纵向力引起的悬架前束角变化和变形转向，则可根据式(7.29)对不同类型的驱动模式进行建模。只要 $A_1>0$ 且在 $\ddot{x}=0$ 附近，则当车辆加速时，转向半径增加；车辆减速时，转向半径减小。这一点在

前轮驱动的车辆上更为明显。对后轮驱动的车辆而言，随着 $\ddot{x}$ 变大，其转向半径减小。

图 7.3 表示转向半径与纵向加速度之间的关系。其中，前束角变化和变形转向如此设定，以使 A_1 尽可能的小。在实际情况下，$A_1 \leqslant 0$ 的情况并不存在，但在 $\ddot{x}=0$ 附近，纵向加速度的影响可以忽略。特别指出的是，驱动/发动机制动对四轮驱动的车辆的影响非常小。

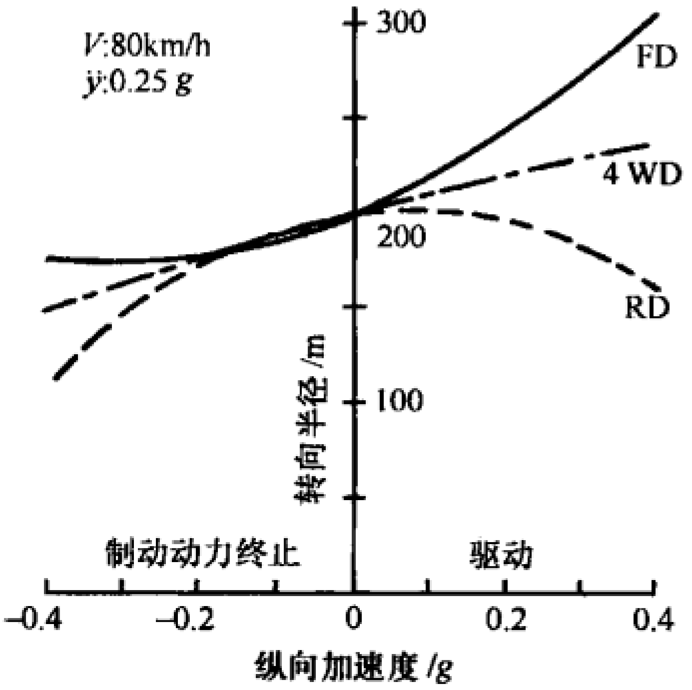


图 7.3　转向半径与纵向加速度的关系

7.4　车辆转向的瞬态响应

前一节中，我们将驱动/制动车辆的转向稳定性因子进行了扩展，并以此研究了加速或减速时对转向的影响。其扩展的前提是，假设加速度很小。据此，车辆的运动方程可扩展至具有驱动/制动效应的所有情况。通过假设前、后轴至质心的距离相对于纵向加速度发生等效变化，可以得到此结论。这也表明，以这些运动方程分析、研究驱动/制动时车辆相对于转向操纵的瞬态响应是可行的。

7.4.1　运动方程

首先，与 7.3.1 小节中相同，驱动/制动时车辆的等效侧偏刚度可由式(7.9′)和式(7.10′)表示。同样，驱动/制动时车辆的前束角变化可表示为

$$\alpha_f=(p_f+q_f\ddot{x})\ddot{y} \tag{7.36}$$

$$\alpha_r=(p_r+q_r\ddot{x})\ddot{y} \tag{7.37}$$

这里，考虑到车辆侧倾和俯仰引起的前束角变化以及作用于轮胎的纵向力所产生的变形转向，故有

$$p_{\mathrm{f}}=\frac{\partial \alpha_{\mathrm{f}}}{\partial z}\frac{d_{\mathrm{f}}hW}{2K_{\phi}} \tag{7.38}$$

$$q_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\partial \alpha_{\mathrm{f}}}{\partial X}\frac{\alpha_{\mathrm{c}}W}{2}-\frac{\partial \alpha_{\mathrm{f}}}{\partial z}\frac{I_{\mathrm{f}}hW}{K_{\phi}}\right)\frac{\partial K_{\mathrm{f}}}{\partial W}\frac{hWK_{\phi\mathrm{f}}}{d_{\mathrm{f}}K_{\phi}K_{\mathrm{f}0}} \tag{7.39}$$

$$p_{\mathrm{r}}=\frac{\partial \alpha_{\mathrm{r}}}{\partial z}\frac{d_{\mathrm{r}}hW}{2K_{\phi}} \tag{7.40}$$

$$q_{\mathrm{r}}=\left(\frac{\partial \alpha_{\mathrm{r}}}{\partial X}\frac{1-\alpha_{\mathrm{c}}}{2}W+\frac{\partial \alpha_{\mathrm{r}}}{\partial z}\frac{I_{\mathrm{r}}hW}{K_{\theta}}\right)\frac{\partial K_{\mathrm{r}}}{\partial W}\frac{hWK_{\phi\mathrm{r}}}{d_{\mathrm{r}}K_{\phi}K_{\mathrm{r}0}} \tag{7.41}$$

另外，与式(7.15)相似，由前轮的侧向力和纵向力引起的、作用于转向系的力矩可表示为

$$T=2\left(\xi+\frac{\alpha_{\mathrm{c}}W}{2K_{\mathrm{y}}}\ddot{x}\right)Y_{\mathrm{f}}$$

考虑到由转向力矩引起的变形转向，前轮侧边刚度可用与 5.3.1 节相同的形式表示如下：

$$2eK_{\mathrm{f}}^{*}=\frac{2K_{\mathrm{f}}^{*}}{1+2\dfrac{\partial \alpha_{\mathrm{f}}}{\partial T}\left(\xi+\dfrac{\alpha_{\mathrm{c}}W}{2K_{\mathrm{y}}}\ddot{x}\right)K_{\mathrm{f}}^{*}} \tag{7.42}$$

假设在某较短时间内纵向加速度不变，且由此加速度引起的车速变化可以忽略，则在该时间段内车辆运动方程可表示为：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=2eK_{\mathrm{f}}^{*}\left(\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}}{V}r+\alpha_{\mathrm{f}}\right)+2K_{\mathrm{r}}^{*}\left(-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}}{V}r+\alpha_{\mathrm{r}}\right) \tag{7.43}$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2l_{\mathrm{f}}eK_{\mathrm{f}}^{*}\left(\delta-\beta-\frac{l_{\mathrm{f}}}{V}r+\alpha_{\mathrm{f}}\right)-2l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}^{*}\left(-\beta+\frac{l_{\mathrm{r}}}{V}r+\alpha_{\mathrm{r}}\right) \tag{7.44}$$

其中，式(7.36)和式(7.37)中的 $\ddot{y}$ 随转向输入的变化而变化，并可表示为 $V(\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t+r)/g$。如果这样，式(7.43)和式(7.44)将过于复杂并难于分析。为了使之简化，假设式(7.36)和式(7.37)中的前束角 α_{f} 和 α_{r} 只与稳态侧向加速度 $\ddot{y}=Vr/g$ 有关，即

$$\alpha_{\mathrm{f}}=\frac{(p_{\mathrm{f}}+q_{\mathrm{f}}\ddot{x})Vr}{g} \tag{7.36′}$$

$$\alpha_{\mathrm{r}}=\frac{(p_{\mathrm{r}}+q_{\mathrm{r}}\ddot{x})Vr}{g} \tag{7.37′}$$

将其代入式(7.43)和式(7.44)，并整理后得到：

$$mV\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+r\right)=2eK_f^*\left(\delta-\beta-\frac{l_f^*}{V}r\right)+2K_r^*\left(-\beta+\frac{l_r^*}{V}r\right) \quad (7.43')$$

$$I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2l_feK_f^*\left(\delta-\beta-\frac{l_f^*}{V}r\right)-2l_rK_r^*\left(-\beta+\frac{l_r^*}{V}r\right) \quad (7.44')$$

其中，

$$l_f^*=l_f\left(1-\frac{p_f+q_f\ddot{x}}{l_f}V^2\right) \quad (7.45)$$

$$l_r^*=l_r\left(1-\frac{p_r+q_r\ddot{x}}{l_r}V^2\right) \quad (7.46)$$

整理式(7.43′)和式(7.44′)，则有：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(eK_f^*+K_r^*)\beta+\left[mV+\frac{2(l_f^*eK_f^*-l_r^*K_r^*)}{V}\right]r=2eK_f^*\delta \quad (7.47)$$

$$2(eK_f^*+K_r^*)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_fl_f^*eK_f^*-l_rl_r^*K_r^*)}{V}r=2l_feK_f^*\delta \quad (7.48)$$

以上就是车辆驱动/制动时车辆转向响应的运动方程。

7.4.2 转向输入的瞬态响应

根据式(7.47)和式(7.48)，可得到相对于转向输入的车辆横摆角速度响应如下：

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{G_\delta^r(0)(1+T_rs)}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (7.49)$$

其中，

$$\omega_n^2=\frac{4eK_f^*K_r^*l(l_f^*+l_r^*)}{mIV^2}-\frac{2(l_feK_f^*-l_rK_r^*)}{I} \quad (7.50)$$

$$2\zeta\omega_n=\frac{2m(l_f^*l_feK_f^*+l_r^*l_rK_r^*)+2I(eK_f^*+K_r^*)}{mIV} \quad (7.51)$$

$$T_r=\frac{ml_fV}{2lK_r^*} \quad (7.52)$$

$$G_\delta^r(0)=\frac{V}{(l_f^*+l_r^*)}\frac{1}{1+A^*V^2} \tag{7.53}$$

$$A^*=-\frac{m(l_feK_f^*-l_rK_r^*)}{2eK_f^*K_r^*l(l_f^*+l_r^*)} \tag{7.54}$$

采用7.3节中所述的方法处理方程中的微小量，则 A^* 与7.3节中推导出的车辆驱动/制动时的扩展稳定性因子相同。另外，由式(7.50)～式(7.53)可得到车辆驱动/制动时相对于转向输入的响应参数，并可用它们来评价加减速对瞬态转向响应的影响。

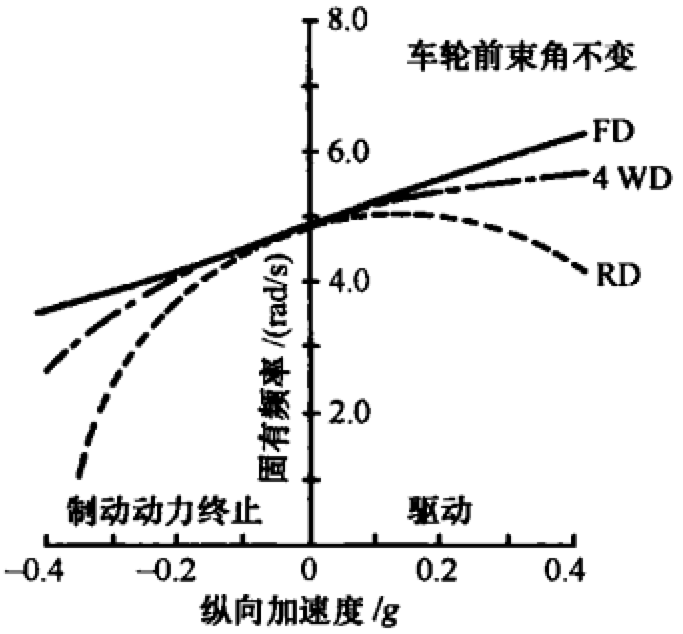


图7.4　纵向加速度对固有频率 ω_n 的影响

由式(7.50)得到的固有频率 ω_n 与纵向加速度之间的关系如图7.4所示。图7.5则表示阻尼比 ζ 与纵向加速度之间的关系。可见，固有频率在驱动时增加，制动时减小。相反，阻尼比在驱动时减小，制动时增加。在后轮驱动的情况下，当纵向加速度增大时，固有频率降低。

车辆对阶跃转向输入的横摆角速度响应，其到达第一峰值的时间 t_p 由式(3.86)给出。无、有前束角变化时，t_p 相对于纵向加速度的变化可分别通过方程式(7.50)～式(7.52)得到，分别由图7.6和图7.7所示。由图可知，驱动时 t_p 变小，制动时 t_p 变大。在后轮驱动的情况下，驱动时 t_p 变大。此外，可由图7.7来估计如何利用前束角变化和变形

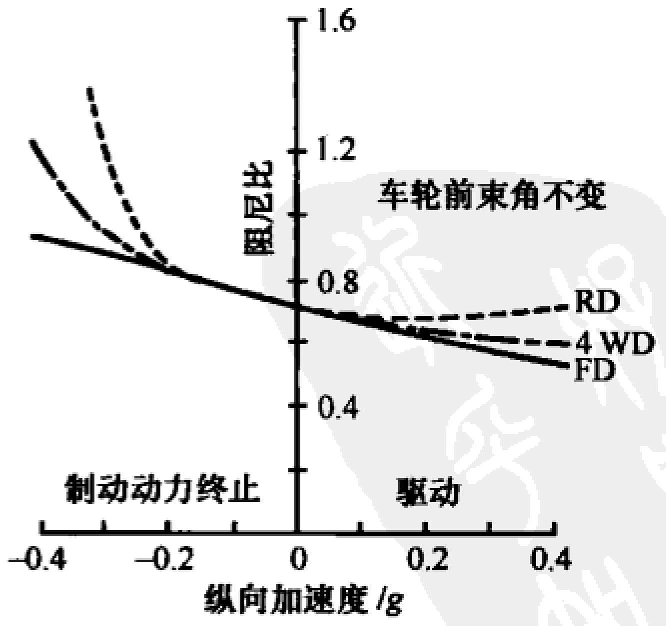


图7.5　纵向加速度对阻尼比 ζ 的影响

转向减轻车辆驱动/制动对 t_p 的影响。

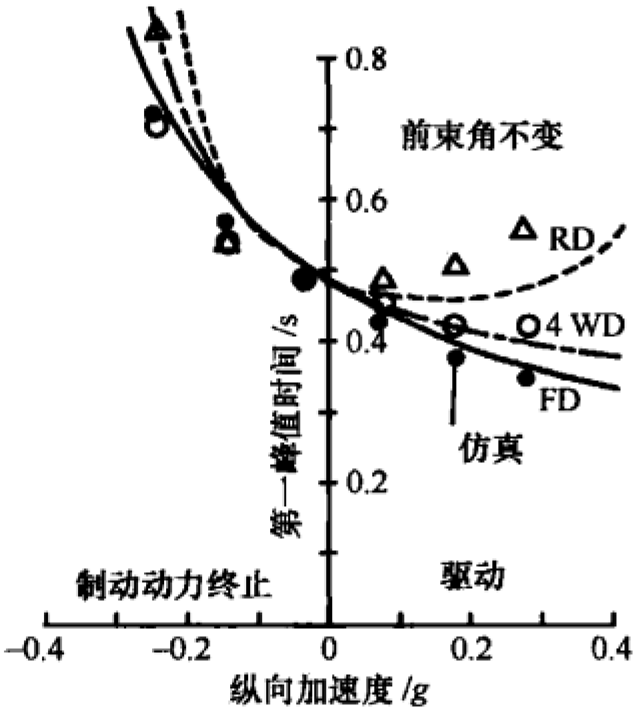


图 7.6　无前束角变化时纵向加速度对横摆角速度响应的影响

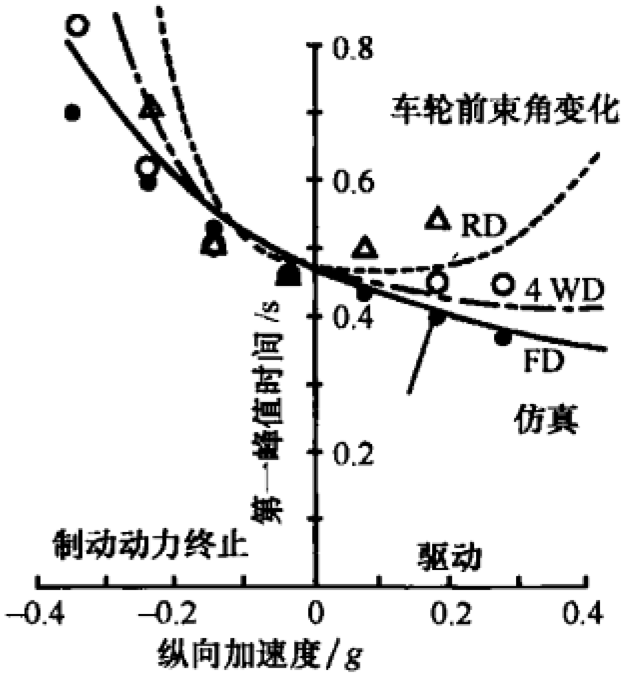


图 7.7　前束角变化时纵向加速度对横摆角速度响应的影响

根据式(7.47)和式(7.48)，可得到驱动/制动时，车辆对阶跃转向输入的横摆角速度响应，如图 7.8 所示。图中，通过数值求解对运动方程式(7.1)、式(7.2)和式(3.5′)分析得到车辆响应，模拟的车辆侧倾和俯仰运动被绘出，两结果显示一致。此结论验证了处理驱动/制动车辆的转向响应的简化方法的有效性，也与本章开始时对准准态情况的假设一致。

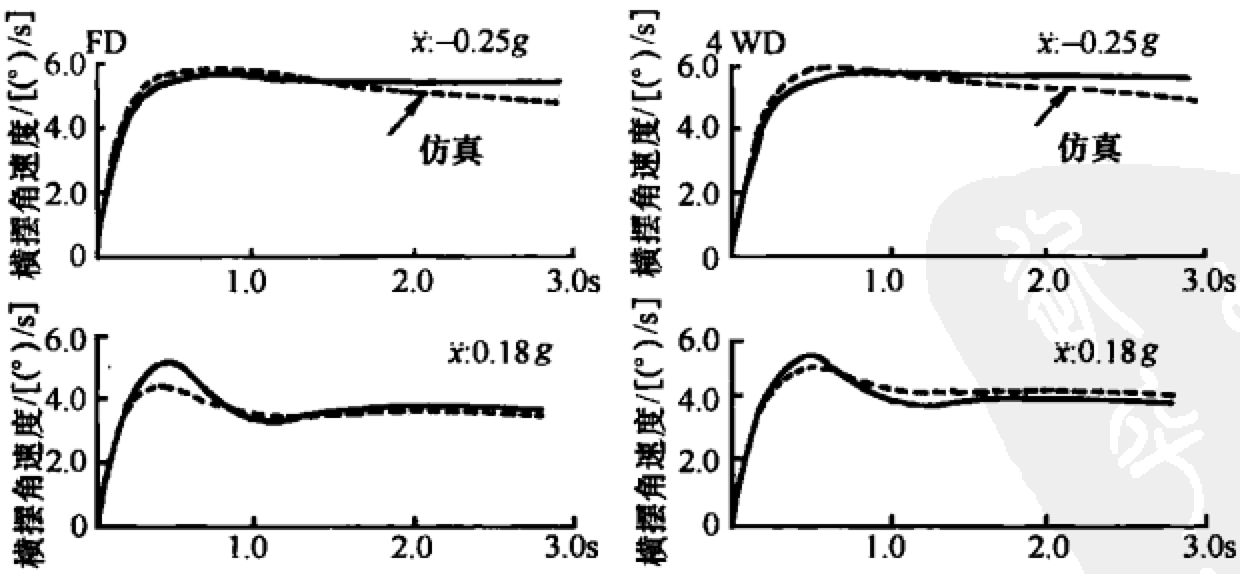


图 7.8　$V=100\text{km/h}$ 时，纵向加速度对阶跃输入下横摆角响应的影响

第 8 章　车辆动力学主动控制

8.1　引言

前面的章节中，我们研究了仅以前轮为转向轮的车辆运动对转向盘操纵的响应。近年来研究证明：除了前轮转向外，通过增加后轮主动转向，车辆的动力学特性可得到大幅度提高。近来，通过采用一个直接的横摆力矩来控制车辆的运动成为受关注的焦点。它由控制纵向力在车轴上的横向分配来实现，被称为直接横摆力矩控制(DYC)。

本章中，我们将研究在传统前轮转向车辆上加入主动后轮转向控制时车辆的运动。这其中包括车辆动力学的基本知识以及主动前、后轮转向的基本控制概念。同时我们假设，转向盘与前轮之间无任何机械结构的连接。在本章的最后，我们还给出了车辆动力学直接横摆力矩控制的基本概念。

8.2　附加后轮转向的车辆运动

设前、后轮转角分别为 δ_f、δ_r，表示前、后轮侧向力的式(3.8)、式(3.9)可改写为

$$Y_f = -K_f\beta_f = -K_f\left(\beta + \frac{l_f}{V}r - \delta_f\right) \tag{8.1}$$

$$Y_r = -K_r\beta_r = -K_r\left(\beta - \frac{l_r}{V}r - \delta_r\right) \tag{8.2}$$

将其代入式(3.4′)和式(3.5′)，则得到前、后轮转向车辆的运动方程如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_{\mathrm{f}}+K_{\mathrm{r}})\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{r}})\right]r=2K_{\mathrm{f}}\delta_{\mathrm{f}}+2K_{\mathrm{r}}\delta_{\mathrm{r}} \tag{8.3}$$

$$2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_{\mathrm{f}}^2K_{\mathrm{f}}+l_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{r}})}{V}r=2l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}\delta_{\mathrm{f}}-2l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}\delta_{\mathrm{r}} \tag{8.4}$$

8.2.1 与前轮转角成正比的后轮转向

通常，后轮与前轮同时转向的方式有多种。首先，我们考虑最简单的后轮转向方式，即后轮正比于前轮转角的情况，并考察此时车辆的运动。

在这种情况下，前、后轮转角可分别表示为

$$\delta_{\mathrm{f}}=\frac{\delta}{n} \tag{8.5}$$

$$\delta_{\mathrm{r}}=k\delta_{\mathrm{f}}=\frac{k}{n}\delta \tag{8.6}$$

这里的(在本章中)δ不代表前轮转向角，而是代表转向盘转角，n为前轮转向系的传动比。

将式(8.5)和式(8.6)代入式(8.3)和式(8.4)，得到后轮转向角正比于前轮转向角时车辆对转向盘转角的响应，即

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix}2(K_{\mathrm{f}}+kK_{\mathrm{r}}) & mV+\dfrac{2}{V}(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\\ (l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-kl_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}) & Ls+\dfrac{2(l_{\mathrm{f}}^2K_{\mathrm{f}}+l_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{r}})}{V}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}mVs+2(K_{\mathrm{f}}+K_{\mathrm{r}}) & mV+\dfrac{2}{V}(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\\ 2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}) & Ls+\dfrac{2}{V}(l_{\mathrm{f}}^2K_{\mathrm{f}}+l_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{r}})\end{vmatrix}} \tag{8.7}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix}mVs+2(K_{\mathrm{f}}+K_{\mathrm{r}}) & 2(K_{\mathrm{f}}+kK_{\mathrm{r}})\\ 2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}) & 2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-kl_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}mVs+2(K_{\mathrm{f}}+K_{\mathrm{r}}) & mV+\dfrac{2}{V}(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}})\\ 2(l_{\mathrm{f}}K_{\mathrm{f}}-l_{\mathrm{r}}K_{\mathrm{r}}) & Ls+\dfrac{2(l_{\mathrm{f}}^2K_{\mathrm{f}}+l_{\mathrm{r}}^2K_{\mathrm{r}})}{V}\end{vmatrix}} \tag{8.8}$$

根据式(8.7)和式(8.8)，并为方便与只有前轮转角的通常传递函数形式进行对比，可将侧向加速度 $V(\dot{\beta}+\gamma)$ 和横摆角速度对转向盘转角的传递函数表示为如下形式：

$$\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=\frac{1-k}{n}G_{\delta}^{\ddot{y}}(0)\frac{1+(1+\lambda_1)T_{y1}s+(1+\lambda_2)T_{y2}s^2}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}} \tag{8.9}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1-k}{n}G_{\delta}^{r}(0)\frac{1+(1+\lambda_r)T_r s}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}} \tag{8.10}$$

其中，

$$\lambda_1=\frac{l}{l_r}\frac{k}{1-k}$$

$$\lambda_2=\frac{K_f+K_r}{K_r}\frac{k}{1-k}$$

$$\lambda_r=\frac{l_fK_f-l_rK_r}{l_fK_f}\frac{k}{1-k}$$

符号 ω_n、ζ、T_{y1}、T_{y2}、T_r、$G_{\delta}^{\ddot{y}}(0)$、$G_{\delta}^{r}(0)$ 与3.4.2小节(即仅前轮转向时)的意义相同。

由式(8.9)和式(8.10)可知，若与前轮成比例地操纵后轮转向，则总增益将达到原先的$(1-k)$倍，同时，传递函数分子的 s 及 s^2 项的系数分别增加 λ_1、λ_2 倍。若 $0<k<1$，则 λ_1、λ_2 为正。因此，如果后轮随前轮同向转向且转角小于前轮，则侧向加速度相对于转向输入的相位滞后将减小。又若车辆的转向特性接近于中性转向(即 $\lambda_r\approx 0$)，则后轮转向对横摆角速度响应的影响会很小。

以某中性转向特性车辆为例，根据式(8.9)对与前轮转角成比例的后轮转向对车辆侧向加速度响应的影响进行了考察，如图8.1所示[1]。可见，通过增加与前轮同向的后轮转向，车辆侧向加速度的响应性有所提高。

特别需要指出的是，相比前轮转向的情况，ω_n 和 ξ 值不变。对恒定的转向转角，若采用式(8.7)求侧偏角 β 的稳态值，则有

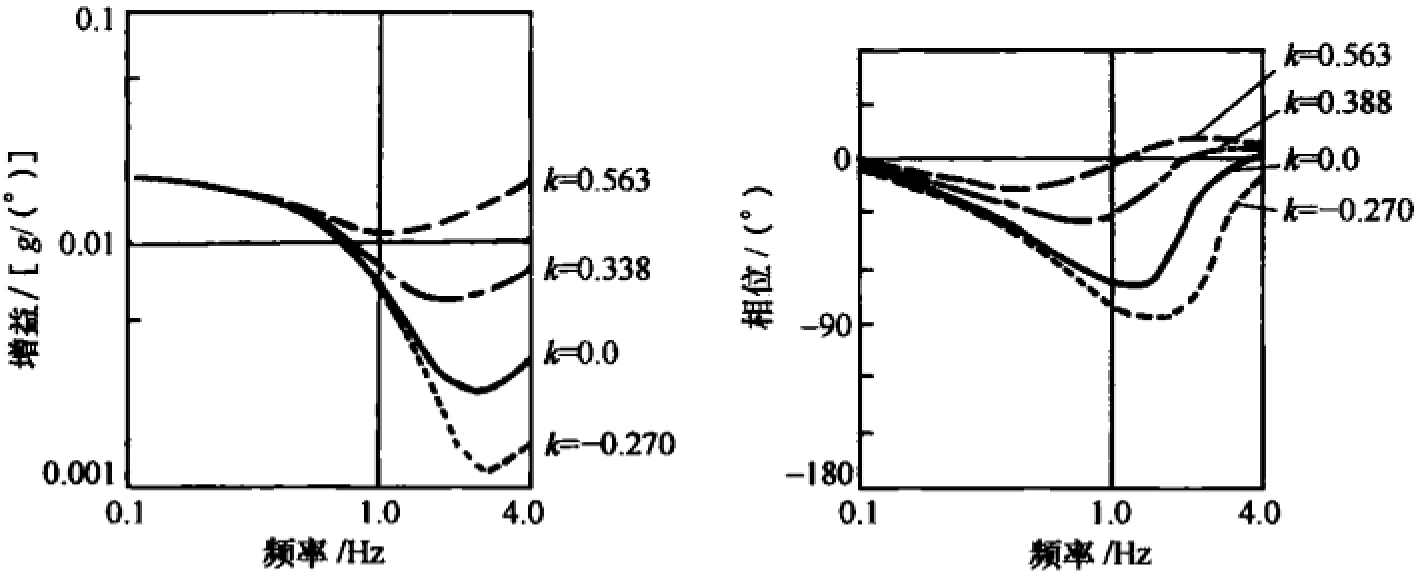


图 8.1　与前轮转角成比例的后轮转向对车辆侧向加速度响应的影响

$$
\beta(s)=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix}2(K_f+kK_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\\ (l_fK_f-kl_rK_r) & \dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & \dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\end{vmatrix}}\delta \tag{8.11}
$$

由此可求得使稳态侧偏角 β_s 值恒为零的 k 值，即式(8.11)中分子为零的 k，即

$$
k=k_0=-\frac{l_r\left(1-\dfrac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right)}{l_f\left(1+\dfrac{ml_f}{2ll_rK_f}V^2\right)} \tag{8.12}
$$

因此，如果按式(8.12)设定后轮转角相对于前轮转角的比例常数，则稳态转向时车辆的质心侧偏角为零，即车辆行驶方向与车辆航向是一致的。

以此求得的比例常数随车辆行驶速度而变，如图 8.2 所示。当 k_0 为负时，前轮与后轮的转向方向相反；而 k_0 为正时，则两者转向方向相同。在车辆低速行驶时，后轮转向方向与前轮相反；而在高速时，转向相同。那么，可以实现稳态侧偏角的值始终为零，即稳态转向运动时侧偏角为零。

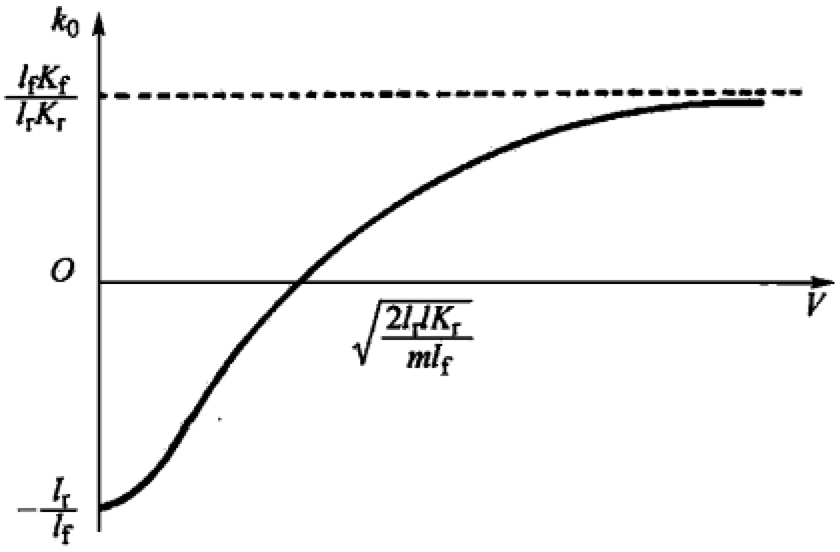


图 8.2　侧偏角为零时后轮转角相对于前轮转角的比例常数

8.2.2　与前轮转向力成正比的后轮转向

下面，考虑以正比于前轮的转向力操纵后轮转向的情形。设前轮转向系的转向力等于通过前轮而作用的外力所产生的力矩，则有

$$M = 2\xi K_f\left(\beta + \frac{l_f}{V}r - \delta_f\right) \tag{8.13}$$

其中 ξ 与第五章中对应部分的意义相同。此时，前后轮转角可分别写成如下形式：

$$\delta_f = \frac{\delta}{n} \tag{8.5}$$

$$\delta_r = kM = 2k\xi K_f\left(\beta + \frac{l_f}{V}r - \delta_f\right) \tag{8.14}$$

将其代入式(8.3)和式(8.4)，并以传递函数的形式求解侧偏角和横摆角速度的响应，则得：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix} 2(K_f + 2k\xi K_f K_r) & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) + \frac{4k\xi L_f K_f K_r}{V} \\ (l_f K_f - 2k\xi l_r K_f K_r) & Is + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} - \frac{4k\xi L_f K_f K_r}{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + 2K_r) + 4k\xi K_f K_r & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) + \frac{4k\xi L_f K_r K_f}{V} \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) - 4k\xi l_r K_f K_r & Is + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} - \frac{4k\xi L_f K_f K_r}{V} \end{vmatrix}} \tag{8.15}$$

$$
\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r)+4k\xi K_fK_r & 2(K_f+2k\xi K_fK_r) \\ 2(l_fK_f-l_rK_r)-4k\xi l_rK_fK_r & (l_fK_f-2k\xi l_rK_fK_r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r)+4k\xi K_fK_r & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)+\dfrac{4k\xi L_fK_fK_r}{V} \\ 2(l_fK_f-l_rK_r)-4k\xi l_rK_fK_r & Is+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}-\dfrac{4k\xi L_fK_fK_r}{V} \end{vmatrix}} \tag{8.16}
$$

与 8.2.1 小节相同，可求得侧向加速度和横摆角速度对转向盘转角的传递函数分别为：

$$
\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}G_\delta^{\ddot{y}}(0)^*\frac{1+T_{y1}s+(1+\lambda_2)T_{y2}s^2}{1+\dfrac{2\zeta^*s}{\omega_n^*}+\dfrac{s^2}{\omega_n^{*2}}} \tag{8.17}
$$

$$
\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}G_\delta^{r}(0)^*\frac{1+(1+\lambda_r)T_rs}{1+\dfrac{2\zeta^*s}{\omega_n^*}+\dfrac{s^2}{\omega_n^{*2}}} \tag{8.18}
$$

这里，设稳定性因子为

$$
A^*=A+\frac{k\xi l_rm}{l^2} \tag{8.19}
$$

则得：

$$
G_\delta^{\ddot{y}}(0)^*=VG_\delta^{r}(0)^*=\frac{1}{1+A^*V^2}\frac{V^2}{l} \tag{8.20}
$$

$$
\omega_n^*=\frac{2l}{V}\sqrt{\frac{K_fK_r}{mL}(1+A^*V^2)}=\sqrt{\omega_n^2+\frac{4k\xi l_rK_fK_r}{I}} \tag{8.21}
$$

$$
\zeta^*=\frac{m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+I(K_f+K_r)+2k\xi K_fK_r(L-ml_fl_r)}{2l\sqrt{mIK_fK_r(1+A^*V^2)}} \tag{8.22}
$$

其中 A 即为第 3 章中定义的前轮转向车辆的稳定性因子。

$$
\lambda_2=2k\xi K_r
$$

$$
\lambda_r=-\frac{2k\xi l_rK_r}{l_f}
$$

时间常数（T_{y1}, T_{y2}, T_r）与 3.4.2 小节中描述的前轮转向车辆相同。

由此可见，当后轮转向与前轮转向力成比例时，与仅有前轮转向

的车辆相比，侧向加速度及横摆角速度对转向盘转角的传递函数式(8.17)和式(8.18)的分子以及分母均发生变化，即车辆的固有频率及阻尼比也将发生变化。

若 $k>0$，则稳定性因子将变大，固有频率将增加。并且，侧向加速度表达式分子的 s^2 项系数也增大，这将会改善侧向加速度的响应性能。但是横摆角速度分子的 s 项系数将减小，使横摆角速度响应性能恶化。由式(8.17)和式(8.18)，可考察比例常数 k 对车辆侧向加速度和横摆角速度相应于转向盘转角的频率响应的影响，如图 8.3 所示[2]。

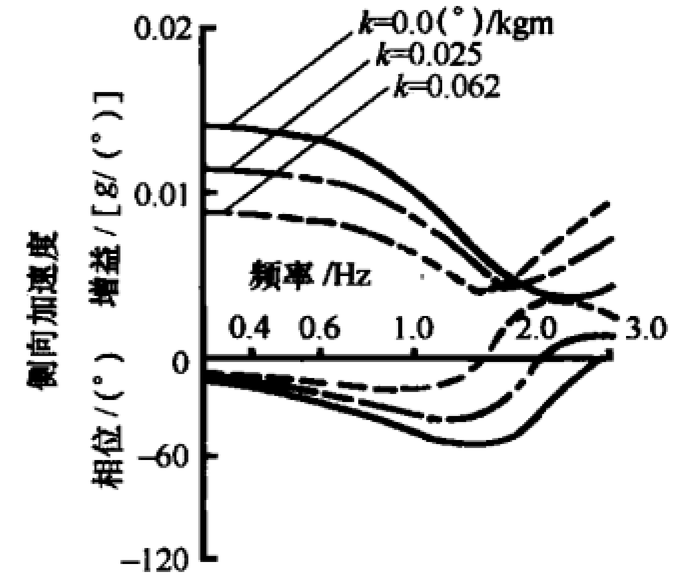


图 8.3　与前轮转向力成正比的后轮转向对车辆侧向加速度及横摆角频率响应的影响

8.2.3　与横摆角速度成正比的后轮转向

下面考虑正比于车辆横摆角速度的后轮转向的情形。此时，前轮和后轮转角可分别表示如下：

$$\delta_f = \frac{\delta}{n} \tag{8.5}$$

$$\delta_r = k_r \tag{8.23}$$

将其代入式(8.3)和式(8.4)，并同样地以传递函数形式求得侧偏角和横摆角速度对转向输入的响应，有

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix}2K_f & mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)-2kK_r\\ l_fK_f & Is+\frac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2kl_rK_r\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}mVs+2(K_f+K_r) & mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)-2kK_r\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\frac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2kl_rK_r\end{vmatrix}} \tag{8.24}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix}mVs+2(K_f+K_r) & 2K_f\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & 2l_fK_f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}mVs+2(K_f+K_r) & mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)-2kK_r\\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\frac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2kl_rK_r\end{vmatrix}} \tag{8.25}$$

根据式(8.24)和式(8.25)，并方便与只有前轮转角的常见传递函数形式对比，可得侧向加速度和横摆角速度对转向盘转角的传递函数分别如下：

$$\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}G_\delta^{\ddot{y}}(0)^*\frac{1+(1+\lambda_1)T_{y1}s+T_{y2}s^2}{1+\frac{2\zeta^*s}{\omega_n^*}+\frac{s^2}{\omega_n^{*2}}} \tag{8.26}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}G_\delta^{r}(0)^*\frac{1+T_rs}{1+\frac{2\zeta^*s}{\omega_n^*}+\frac{s^2}{\omega_n^{*2}}} \tag{8.27}$$

其中，稳定性因子为

$$A^*=A+\frac{k}{l}\frac{1}{V^2} \tag{8.28}$$

则有

$$G_\delta^{\ddot{y}}(0)^*=VG_\delta^{r}(0)^*=\frac{1}{1+A^*V^2}\frac{V^2}{l} \tag{8.29}$$

$$\omega_n^*=\frac{2l}{V}\sqrt{\frac{K_fK_r}{mL}(1+A^*V^2)}=\sqrt{\omega_n^2+\frac{4kK_fK_r}{mIV}} \tag{8.30}$$

$$\zeta^*=\frac{m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+I(K_f+K_r)+kml_rK_rV}{2l\sqrt{mIK_fK_r(1+A^*V^2)}} \tag{8.31}$$

而：

$$\lambda_1 = \frac{kV}{l_r}$$

可见，正比于横摆角速度的后轮转向车辆，其稳定性因子会发生改变，如式(8.28)所示，车辆的固有频率和阻尼比也发生相应变化。

若 $k>0$，则车辆的固有频率增大，侧向加速度分子的 s 项系数也变大，车辆的响应性得到改善。

8.3　使侧偏角为零的后轮转向控制

8.2.1 小节的分析表明，当采用正比于前轮转角的后轮转向时，通过适当地选取其比例系数，可实现车辆作稳态转向运动时其质心侧偏角为零。下面，我们进一步考察使质心侧偏角对任意转向输入的响应恒为零的后轮转向规律。

8.3.1　由前轮转角控制的后轮转向方式

由于后轮转向并非只是与前轮成比例，而是具有一般性的传递函数关系。因此，后轮转角的通式可表示为

$$\delta_r(s) = k(s)\delta_f(s) = \frac{k(s)}{n}\delta(s) \tag{8.6'}$$

式中，$k(s)$ 为后轮转角相对于前轮转角的传递函数。

此时，相应于转向盘转角，同样采用式(8.7)对侧偏角的求解，得：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix} 2\{K_f + k(s)K_r\} & mV + \dfrac{2}{V}(l_fK_f - l_rK_r) \\ 2\{l_fK_f - k(s)l_rK_r\} & Ls + \dfrac{2(l_f^2K_f + l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + K_r) & mV + \dfrac{2}{V}(l_fK_f - l_rK_r) \\ 2(l_fK_f - l_rK_r) & Ls + \dfrac{2}{V}(l_f^2K_f + l_r^2K_r) \end{vmatrix}} \tag{8.7'}$$

因此，若设定 $k(s)$ 使式(8.7′)的分子为零，即

$$\begin{vmatrix} 2[K_f+k(s)K_r] & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ 2[l_fK_f-k(s)l_rK_r] & IS+\dfrac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V} \end{vmatrix}=0 \quad (8.32)$$

则侧偏角对转向盘转角响应的传递函数为零。

将式(8.32)展开，求得 $k(s)$ 为

$$k(s)=-\frac{l_r-\dfrac{ml_f}{2lK_r}V^2+\dfrac{IV}{2lK_r}s}{l_f+\dfrac{ml_r}{2lk_f}V^2+\dfrac{IV}{2lK_f}s}=\frac{k_0}{1+T_es}-\frac{K_f}{K_r}\frac{T_es}{1-T_es} \quad (8.33)$$

其中，k_0 可以通过式(8.12)求得，并且有

$$T_e=\frac{IV}{2ll_fK_f+ml_rV^2} \quad (8.34)$$

就是说，若相对于前轮转角的后轮转向响应由式(8.33)的传递函数给出，则可使质心侧偏角恒为零，从而实现车辆的航向始终与行驶方向一致。此时，相应于转向盘转角的横摆角速度响应为

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\dfrac{ml_r}{2ll_fK_f}V^2}\frac{V}{l_f}\frac{1}{1+T_es} \quad (8.35)$$

8.3.2 正比于前轮且正比于横摆角速度的后轮转向方式

若按正比于前轮转角以及正比于横摆角速度之和作为后轮转角操纵后轮转向，也可使车辆的质心侧偏角恒为零。设：

$$\delta_r=k_\delta\delta_f+k_rr=\frac{k_\delta}{n}\delta+k_rr \quad (8.36)$$

则与前面同样，可求得质心侧偏角对转向盘转角的响应为

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix} 2(K_f+k_\delta K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)-2k_rK_r \\ (l_fK_f-k_\delta l_fK_r) & Is+\dfrac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2k_rl_rK_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs+2(K_f+K_r) & mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)-2k_rK_r \\ 2(l_fK_f-l_rK_r) & Is+\dfrac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)+2k_rl_rK_r \end{vmatrix}} \quad (8.37)$$

因此，若有

$$\begin{vmatrix} 2(K_f + k_\delta K_r) & mV + \dfrac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) - 2k_r K_r \\ (l_f K_f - k_\delta l_r K_r) & Is + \dfrac{2}{V}(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + 2k_r l_r K_r \end{vmatrix} = 0 \quad (8.38)$$

成立，则侧偏角为零。展开式(8.38)，可得到关于 s 的一次式。将 s 的系数以及式中的常数项设为零，则可以得到 k_δ、k_r 如下：

$$k_\delta = -\frac{K_f}{K_r} \quad (8.39)$$

$$k_r = \frac{mV^2 + 2(l_f K_f - l_r K_r)}{2K_r V} \quad (8.40)$$

以上的比例常数使 $\beta(s)/\delta(s)$ 恒为零，从而使车辆质心侧偏角相对于转向盘转角恒为零。此时，横摆角速度对转向盘转角的响应与前面相同，可由式(8.35)求得。

8.4　基于后轮转角的横摆角速度模型

通常来说，控制工程包含一种模型跟随控制概念。通过模型跟随后轮转角的控制方式能够使车辆对转向输入实现其希望的响应，即目标模型。为设定车辆运动的目标模型，最简单的方法之一就是采用横摆角速度模型响应。本节将对跟随后轮转向的横摆角速度模型进行研究。

8.4.1　前馈模型跟随控制

对式(8.3)和式(8.4)表示的前、后轮转角输入的车辆运动方程进行拉普拉斯变换，求解得到横摆角速度对转向角的响应为

$$r(s) = \frac{\dfrac{1}{n}G_\delta^r(0)(1 + T_r s)\delta(s) + G_{\delta_r}^r(0)(1 + T_{rr} s)\delta_r(s)}{1 + \dfrac{2\zeta}{\omega_n}s + \dfrac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{\omega_n^2 H_r(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (8.41)$$

其中，$G_\delta^r(0)$ 与 T_r 与第 3 章定义相同，且：

$$H_r(s)=\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_r s)\delta(s)+G_{\delta_r}^r(0)(1+T_{rr}s)\delta_r(s) \quad (8.42)$$

$$G_{\delta_r}^r(0)=-\frac{1}{1+AV^2}\frac{V}{l}=-G_\delta^r(0)$$

$$T_{rr}=\frac{ml_r V}{2lK_f}$$

采用横摆角速度的一阶滞后模型来确定目标的横摆角速度，故有

$$r_m(s)=\frac{1}{n}\frac{G_e}{1+T_e s}\delta(s) \quad (8.43)$$

如果上式的响应与式(8.41)描述的相同，则可得到如下关系：

$$\frac{\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_r s)\delta(s)-G_\delta^r(0)(1+T_{rr}s)\delta_r(s)}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}=\frac{1}{n}\frac{G_e}{1+T_e s}\delta(s)$$

从而可得 $\delta_r(s)$ 如下：

$$\delta_r(s)=\frac{1}{n}\left[-\frac{G_e\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)}{G_\delta^r(0)(1+T_e s)(1+T_r s)}+\frac{1+T_r s}{1+T_{rr}s}\right]\delta(s) \quad (8.44)$$

上式即为用于横摆角速度前馈跟随控制的后轮转向控制律。

8.4.2 前馈与横摆角速度反馈模型跟随控制

采用同样的横摆角速度响应模型，对式(8.43)可改写为如下形式：

$$\left(s+\frac{1}{T_e}\right)r_m(s)=\frac{1}{n}\frac{G_e}{T_e}\delta(s) \quad (8.43')$$

定义模型目标横摆角速度 r_m 与控制车辆的横摆角速度 r 之间的误差为 e，即

$$e(s)=\left(s+\frac{1}{T_e}\right)[r(s)-r_m(s)]$$

为了使误差 e 在一阶延迟响应中收敛于零，应满足：

$$\left(s+\frac{1}{T_g}\right)e(s)=0$$

由以上两个方程可以推导出：

$$\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\left(s+\frac{1}{T_e}\right)[r(s)-r_m(s)]=0$$

将上式重新写成如下形式：

$$\left[s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2+\left(\frac{1}{T_g}+\frac{1}{T_e}-2\xi\omega_n\right)s+\frac{1}{T_gT_e}-\omega_n^2\right]r(s)$$

$$-\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\left(s+\frac{1}{T_e}\right)r_m(s)$$

$$=0$$

将式(8.41)和式(8.43′)代入上式，可得：

$$\omega_n^2H_r(s)+(c_1s+c_0)r(s)-\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\frac{G_e}{T_e}\delta(s)=0$$

其中

$$c_1=\frac{1}{T_g}+\frac{1}{T_e}-2\xi\omega_n$$

$$c_0=\frac{1}{T_gT_e}-\omega_n^2$$

将式(8.42)代入上式，得：

$$\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_rs)\delta(s)-G_\delta^r(0)(1+T_{rr}s)\delta_r(s)$$

$$=-\frac{1}{\omega_n^2}(c_1s+c_0)r(s)+\frac{1}{n}\frac{G_e}{\omega_n^2T_e}\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\delta(s)$$

变形整理后，可得后轮转角跟随目标模型横摆角速度的响应为：

$$\delta_r(s)=\frac{1}{n}\left[\frac{1+T_rs}{1+T_{rr}s}-\frac{G_e}{\omega_n^2T_gT_eG_\delta^r(0)}\frac{1+T_gs}{1+T_{rr}s}\right]\delta(s)+\frac{c_0}{\omega_n^2G_\delta^r(0)}\frac{1+\frac{c_1}{c_0}s}{1+T_{rr}s}r(s) \tag{8.45}$$

上式即为前馈与横摆角速度反馈跟踪模型中后轮转角的控制律。

8.5　前、后轮转向主动控制

前面讨论了前轮转角正比于转向盘转角，后轮转向按某种操纵规则的车辆运动。下面，进一步考虑将前轮与转向盘断开，使前轮转向

也像后轮一样按某种控制律进行，其概念如图 8.4 所示。

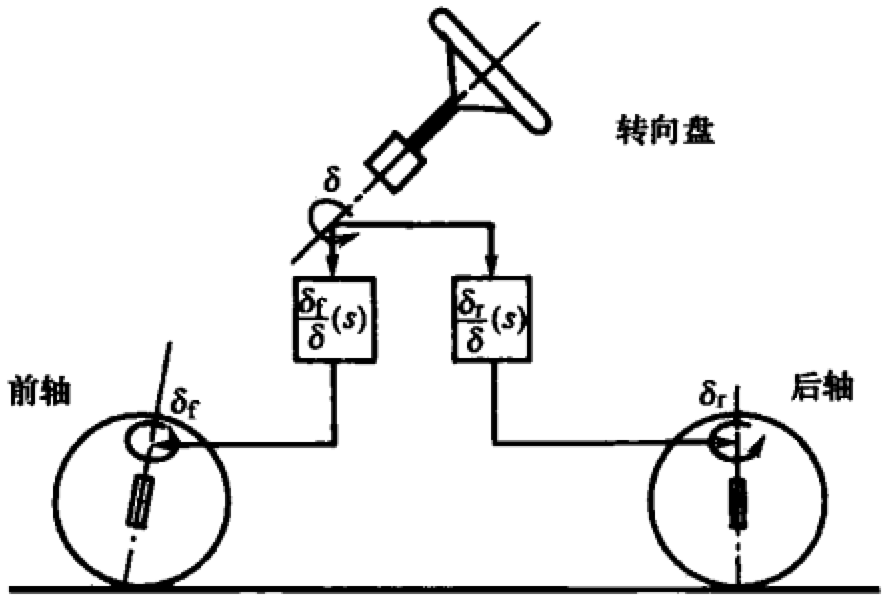


图 8.4　前、后轮主动转向

对式(8.3)和式(8.4)进行拉普拉斯变换，并用侧偏角、横摆角速度、前轮转角、后轮转角相对于转向盘转角的形式表示为

$$[mVs+2(K_f+K_r)]\frac{\beta(s)}{\delta(s)}+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]\frac{r(s)}{\delta(s)}=2K_f\frac{\delta_f(s)}{\delta(s)}+2K_r\frac{\delta_r(s)}{\delta(s)} \tag{8.46}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\frac{\beta(s)}{\delta(s)}+\left[Is+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}\right]\frac{r(s)}{\delta(s)}=2l_fK_f\frac{\delta_f(s)}{\delta(s)}-2l_rK_r\frac{\delta_r(s)}{\delta(s)} \tag{8.47}$$

通常，我们是在给定前、后轮转角的情况下求解车辆的运动响应，它可以通过运动方程式(8.3)和式(8.4)获得。对于主动控制而言，情况正好相反。为了获得车辆前、后轮对转向盘转向角的理想响应 $\beta(s)/\delta(s)$、$r(s)/\delta(s)$，我们需要控制车辆的前后轮转向角。这需要将$\delta_f(s)/\delta(s)$、$\delta_r(s)/\delta(s)$当成变量来实现，改写式(8.41)和式(8.42)，求解得到一阶代数方程如下：

$$\begin{bmatrix}2K_f & 2K_r\\ 2l_fK_f & 2l_rK_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\delta_f(s)}{\delta(s)}\\[2ex] \dfrac{\delta_r(s)}{\delta(s)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[mVs+2(K_f+K_r)]\dfrac{\beta(s)}{\delta(s)}+\left[mV+\dfrac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]\dfrac{r(s)}{\delta(s)}\\ 2(l_fK_f-l_rK_r)\dfrac{\beta(s)}{\delta(s)}+\left[Is+\dfrac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r)\right]\dfrac{r(s)}{\delta(s)}\end{bmatrix} \tag{8.48}$$

换句话说，为了获得期望的车辆响应 $\beta(s)/\delta(s)$、$r(s)/\delta(s)$，前、后轮应该根据如下的控制律进行转向角控制：

$$\frac{\delta_f(s)}{\delta(s)}=\frac{ml_rVs+2lK_f}{2lK_f}\frac{\beta(s)}{\delta(s)}+\frac{Is+ml_rV+\dfrac{2l_flK_f}{V}}{2lK_f}\frac{r(s)}{\delta(s)} \tag{8.49}$$

$$\frac{\delta_r(s)}{\delta(s)}=\frac{ml_fVs+2lK_r}{2lK_r}\frac{\beta(s)}{\delta(s)}-\frac{Is-ml_fV+\dfrac{2l_rlK_f}{V}}{2lK_r}\frac{r(s)}{\delta(s)} \tag{8.50}$$

由上可知，由式(8.49)和式(8.50)确定的前、后轮转向控制律可以任意设定车辆侧偏角和横摆角速度相对于转向盘转角的响应。

现假设理想的侧偏角和横摆角速度的响应均为相同时间常数的一阶延迟响应，即：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)}=\frac{G_\beta}{1+Ts} \tag{8.51}$$

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{G_r}{1+Ts} \tag{8.52}$$

若 $G_\beta=0$，此时侧偏角恒为零，则侧向加速度响应为

$$\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=\frac{G_rV}{1+Ts} \tag{8.53}$$

根据式(8.49)和式(8.50)，可求得此时前、后轮的控制律为

$$\frac{\delta_f(s)}{\delta(s)}=\frac{G_r}{2lK_f}\left[\frac{L}{T}+\left(ml_rV+\frac{2ll_fK_f}{V}-\frac{1}{T}\right)\frac{1}{1+Ts}\right] \tag{8.54}$$

$$\frac{\delta_r(s)}{\delta(s)}=\frac{G_r}{2lK_r}\left[-\frac{L}{T}\left(ml_fV-\frac{2ll_rK_r}{V}+\frac{1}{T}\right)\frac{1}{1+Ts}\right] \tag{8.55}$$

上式即为使侧偏角恒为零且横摆角速度对转向盘转角的响应为一阶延迟的前、后轮转向控制律。

此外，根据式(8.51)和式(8.52)，得侧向加速度响应为

$$\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=V\left[s\frac{\beta(s)}{\delta(s)}+\frac{r(s)}{\delta(s)}\right]=\frac{G_rV\left(1+\frac{G_\beta}{G_r}s\right)}{1+Ts}$$

若 $G_\beta=G_rT$,则侧向加速度响应为:

$$\frac{\ddot{y}(s)}{\delta(s)}=G_rV \tag{8.56}$$

因此，侧向加速度响应完全正比于转向盘的转角输入。

假设 $G_\beta=G_rT$，并将式(8.51)和式(8.52)代入式(8.49)和式(8.50)中，可得前、后轮的转向控制律为：

$$\frac{\delta_f(s)}{\delta(s)}=\frac{G_r}{2lK_f}\left[\frac{L}{T}+ml_rV+\left(\frac{2ll_fK_f}{V}+2lK_fT-\frac{I}{T}\right)\frac{1}{1+Ts}\right] \tag{8.57}$$

$$\frac{\delta_r(s)}{\delta(s)}=\frac{G_r}{2lK_r}\left[-\frac{L}{T}+ml_fV+\left(-\frac{2ll_rK_r}{V}+2lK_rT-\frac{I}{T}\right)\frac{1}{1+Ts}\right] \tag{8.58}$$

这里，通过式(8.54)、式(8.55)和图8.5表明，在转向盘转角是给定的斜坡阶跃输入时，可以确切地得到前、后轮的转向角对转向盘转

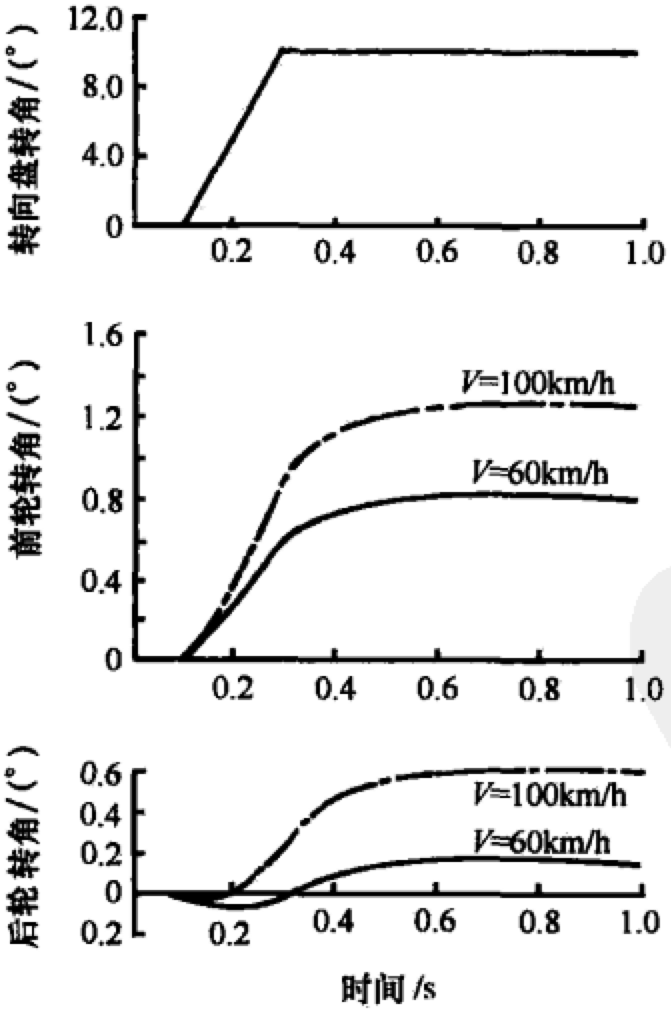


图 8.5 前、后轮转角

角的响应。相关的频率响应如图 8.6 所示。若像转向盘转角那样的响应对前、后轮进行转向，则横摆角速度响应如式(8.52)所示。且侧偏角总为零，侧向加速度响应由式(8.53)得到。

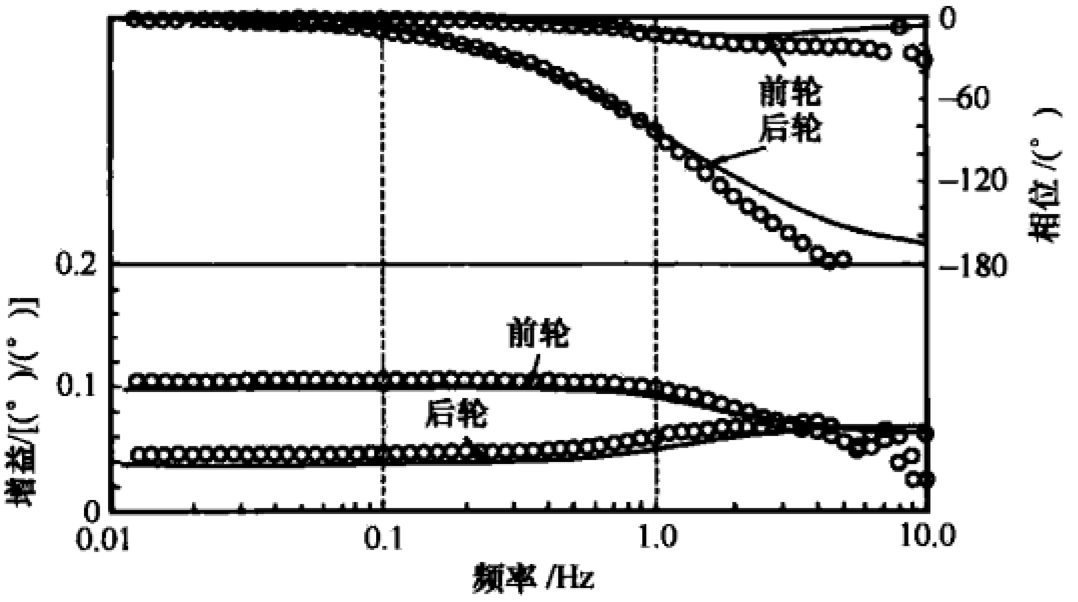


图 8.6　对转向盘转角输入的前、后轮转向频率响应

8.6　车辆运动的直接横摆力矩控制(DYC)

近来对车辆侧向运动控制方法中，直接横摆力矩控制得到关注。它采用由轮胎纵向力产生的横摆力矩来稳定车辆的运动[3]，尤其适用于极限工况。当然，极限工况下的车辆运动大多发生在轮胎的非线性域。但为理解由横摆力矩对车辆运动控制的基本概念，我们仍然需要有效地采用车辆运动的线性方程。

8.6.1　被动横摆力矩控制

车辆的左、右轮能够独立地自由旋转。为了做到这点，无论是对前驱、后驱、还是四驱车辆而言，其驱动轮均通过差速器连接于驱动轴。在车辆转弯时，若其差速器被锁死或者粘性耦合时，其左、右轮胎将作用有相反方向的纵向力，从而产生了控制车辆侧向运动的横摆力矩。下面我们将对该横摆力矩及其对车辆运动的影响进行研究。

1. 锁止差速器效应

防滑差速器是差速器齿轮始终被锁止，直到差速器传递的力矩在

一个限定范围内。这种状态称为差速器锁止。图 8.7 表示了装有锁止差速器的车辆的平面运动。

根据式(2.46)或式(2.66)的定义，在转弯中，装有锁止差速器的左、右轮胎的纵向滑移率 s_L、s_R 表示为

$$s_L = \frac{V - \frac{d}{2}r - R_0\omega}{V - \frac{d}{2}r} \approx -\frac{d}{2V}r \tag{8.59}$$

$$s_R = \frac{V + \frac{d}{2}r - R_0\omega}{V + \frac{d}{2}r} \approx \frac{d}{2V}r \tag{8.60}$$

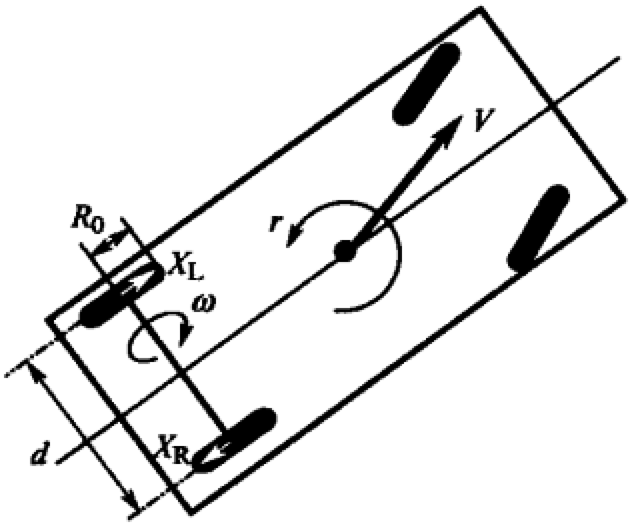


图 8.7　装有锁止差速器的车辆转向

式中，ω 半轴转速；d 为轮距；R_0 为轮胎有效半径。

尽管在制动和驱动的情况下，关于纵向滑移的定义有所不同，但是在假设 $V \approx R_0\omega$ 条件下，上面的定义对两种情况都适用。

在由滑移产生的纵向力很小时，它正比于纵向滑移率。则施加于左、右轮胎的纵向力可表示为

$$X_L = -K_s s_L = \frac{K_s d}{2V}r$$

$$X_R = -K_s s_R = \frac{K_s d}{2V}r$$

式中，K_s 为式(2.54)定义的单位滑移率的轮胎纵向力。

因此，由轮胎纵向力产生的横摆力矩 M 为

$$M = -\frac{d}{2}X_L + \frac{d}{2}X_R = -\frac{K_s d^2}{2V}r \tag{8.61}$$

此时，得到的横摆力矩正比于横摆角速度，且方向相反，被称之为横摆阻尼。该横摆力矩反比于车速，并随车速的增加而下降。

2. 粘性耦合差速器效应

在差速器的齿轮机构中，若左、右车轮是粘性地连接在一起的，这种差速器就叫粘性耦合差速器。

图 8.8 所示为左、右轮由粘性力矩耦合的车辆的平面运动。采用与前面第一部分中相同的符号，可得到左、右车轮的纵向滑移率分别为

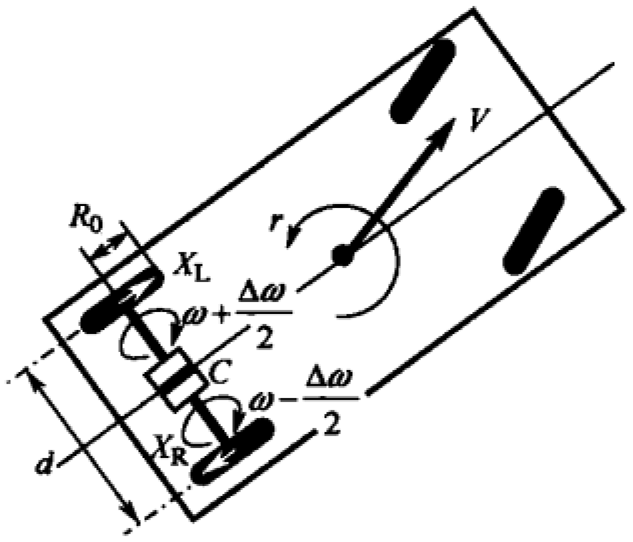


图 8.8　装有粘性耦合差速器的车辆转向

$$s_L=\frac{V-\frac{d}{2}r-R_0\left(\omega-\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{V-\frac{d}{2}r}\approx\frac{-\mathrm{d}r+R_0\Delta\omega}{2V} \tag{8.59'}$$

$$s_R=\frac{V+\frac{d}{2}r-R_0\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{V+\frac{d}{2}r}\approx\frac{\mathrm{d}r-R_0\Delta\omega}{2V} \tag{8.60'}$$

式中，$\Delta\omega$ 为左、右车轮转速差。

由纵向滑移产生的纵向力引起的车轴力矩与粘性耦合力矩平衡。设 C 为粘性耦合力矩系数，可根据力矩平衡条件得到以下面的方程：

$$-R_0K_Ss_L=R_0K_Ss_R=C\Delta\omega \tag{8.61'}$$

将式(8.59′)或式(8.60′)代入式(8.61)，得：

$$R_0K_S\frac{\mathrm{d}r-R_0\Delta\omega}{2V}S_R=C\Delta\omega$$

因此，得到 $\Delta\omega$ 如下：

$$\Delta\omega=\frac{1}{1+\frac{2CV}{R_0^2K_S}}\frac{\mathrm{d}r}{R_0} \tag{8.62}$$

作用于左、右轮胎上的纵向力分别为

$$X_L=-K_Ss_L=\frac{1}{1+\frac{R_0^2K_S}{2CV}}\cdot\frac{K_Sd}{2V}r$$

$$X_R = -K_S s_R = \frac{1}{1 + \frac{R_0^2 K_S}{2CV}} \cdot \frac{K_S d}{2V} r$$

施加于车辆上的横摆力矩为

$$M = -\frac{d}{2}X_L + \frac{d}{2}X_R = -\frac{C}{C + \frac{R_0^2 K_S}{2V}} \frac{K_S d^2}{2V} r \qquad (8.61'')$$

我们知道，与装有锁止差速器的车辆相同，横摆力矩与横摆角速度方向相反，且正比于横摆角速度。同时，由式(8.61″)可知，横摆力矩随着粘性力矩系数变化。公式表明：当 C 等于0，横摆力矩 M 为0，并随着 C 增长，直到横摆力矩到达在有锁止差速器情况下的值，此时 C 将变得非常大。与有锁止差速器情况相同，横摆力矩随着车速增加而减小。

3. 车辆动力学的横摆力矩控制效应

由式(3.12)和式(3.13)，可得到具有附加的横摆力矩控制的车辆运动方程，描述如下：

$$M = -\frac{k_r}{V} r$$

将上述横摆力矩代入式(3.13)的右边，得到：

$$mV\frac{d\beta}{dt} + 2(K_f + K_r)\beta + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r)\right] r = 2K_f \frac{\delta}{n} \qquad (8.63)$$

$$2(l_f K_f - l_r K_r)\beta + I\frac{dr}{dt} + \left[\frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + k_r}{V}\right] r = 2l_f K_f \frac{\delta}{n} \qquad (8.64)$$

采用拉普拉斯变化，侧偏角对于转向盘输入响应的方程形式如下：

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{n} \frac{\begin{vmatrix} 2K_f & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2l_f K_f & Is + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + k_r}{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs + 2(K_f + K_r) & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) & Is + \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{n}G_{\delta}^{*\beta}(0)\frac{1+T_{\beta}^{*}s}{1+\dfrac{2\zeta s}{\omega_{n}^{*}}+\dfrac{s^{2}}{\omega_{n}^{*2}}} \tag{8.65}$$

由此可得：

$$\omega_{n}^{*2}=\frac{4K_{f}K_{r}l^{2}}{mLV^{2}}(1+AV^{2})+\frac{2(K_{f}+K_{r})}{mLV^{2}}k_{r}$$

$$\zeta^{*}=\frac{m(l_{f}^{2}K_{f}+l_{f}^{2}K_{r})+I(K_{f}+K_{r})+\dfrac{mk_{r}}{2}}{2l\sqrt{mLK_{f}K_{r}(1+AV^{2})+\dfrac{K_{f}+K_{r}}{2l^{2}K_{f}K_{r}}k_{r}}}$$

$$G_{\delta}^{*\beta}(0)=\frac{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_{f}}{l_{r}K_{r}}V^{2}+\dfrac{k_{r}}{2ll_{r}K_{r}}}{1+AV^{2}+\dfrac{K_{f}+K_{r}}{2l^{2}K_{f}K_{r}}k_{r}}\frac{l_{r}}{l}$$

$$T_{\beta}^{*}=\frac{IV}{2ll_{r}K_{r}}\frac{1}{1-\dfrac{m}{2l}\dfrac{l_{f}}{l_{r}K_{r}}V^{2}+\dfrac{k_{r}}{2ll_{r}K_{r}}}$$

同样得到车辆横摆角速度响应为

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{\begin{vmatrix} mVs+2(K_{f}+K_{r}) & 2K_{f} \\ 2(l_{f}K_{f}-l_{r}K_{r}) & 2l_{f}K_{f} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mVs+2(K_{f}+K_{r}) & mV+\dfrac{2}{V}(l_{f}K_{f}-l_{r}K_{r}) \\ 2(l_{f}K_{f}-l_{r}K_{r}) & Is+\dfrac{2(l_{f}^{2}K_{f}+l_{r}^{2}K_{r})+K_{r}}{V} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{n}G_{\delta}^{*r}(0)\frac{1+T_{r}s}{1+\dfrac{2\zeta^{*}s}{\omega_{n}^{*}}+\dfrac{s^{2}}{\omega_{n}^{*2}}} \tag{8.66}$$

因而，有

$$G_{\delta}^{*r}(0)=\frac{1}{1+AV^{2}+\dfrac{K_{f}+K_{r}}{2l^{2}K_{f}K_{r}}k_{r}}\frac{V}{l}$$

从上面可以清楚地知道，当横摆力矩控制正比于横摆角速度且方

向相反时，由于横摆阻尼以及对转向盘转向输入的横摆角速度增益的减小，车辆运动对扰动表现得更稳定。也就是说，由于横摆力矩的存在，车辆的稳定性提高，而操纵响应能力受到削弱。

8.6.2 零侧偏角直接横摆力矩控制

下面，我们将考察通过轮胎纵向力的横摆力矩的主动车辆控制。前面我们已证明，通过控制后轮对前轮转角和横摆角速度的响应，可使零侧偏角响应为零。接下来，我们验证采用直接横摆力矩控制获得零侧偏运动的可能性。

首先，考虑横摆力矩正比于转向盘转角和横摆角速度的情况，即

$$M = k_\delta \delta_f + k_r r = \frac{k_\delta}{n}\delta + k_r r \tag{8.67}$$

将上述横摆力矩代入式(3.13)，得到车辆的运动方程如下：

$$mV\frac{d\beta}{dt} + 2(K_f + K_r)\beta + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r)\right]r = 2K_f\delta_f \tag{8.68}$$

$$2(l_f K_f - l_r K_r)\beta + I\frac{dr}{dt} + \left[\frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} - k_r\right]r = (2l_f K_f + k_\delta)\delta_f \tag{8.69}$$

为获得稳态侧偏角等于零的条件，令以上各式中的 $d\beta/dt$ 和 dr/dt 均等于零。于是，得到求解 β 的方程如下：

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2K_f & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2l_f K_f + k_\delta & \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} - k_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(K_f + K_r) & mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r) \\ 2(l_f K_f - l_r K_r) & \frac{2(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r)}{V} - k_r \end{vmatrix}}$$

演化上面的方程、并且考虑稳态零侧偏角的条件（即使其等于零），则有

$$2K_f k_r + \left[mV + \frac{2}{V}(l_f K_f - l_r K_r)\right]k_\delta = \frac{4ll_r K_f K_r}{V}\left(1 - \frac{ml_f}{2ll_r K_r}V^2\right) \tag{8.70}$$

例如，设 $K_r=0$，则由上式得到：

$$k_\delta=\frac{4ll_rK_fK_r\left(1-\dfrac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right)}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)} \tag{8.71}$$

通过使 $K_r=0$，将式(8.71)代入式(8.68)和式(8.69)，并对其进行拉普拉斯变换，得到横摆角速度对转向盘转角输入的响应 $r(s)/\delta(s)$，即

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{2K_fV}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)}\left[\frac{1+\dfrac{m(l_f^2K_f+l_r^2K_r)V}{2l^2K_fK_r(1+AV^2)}s}{1+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2}\right] \tag{8.72}$$

上式就是横摆转矩正比于转向盘转角时，由直接横摆力矩控制产生的稳态零侧偏角车辆对转向盘转角输入的横摆角速度响应。

通过使 $K_\delta=0$ 并代入式(8.70)，有

$$k_r=\frac{2ll_rK_fK_r}{V}\left(1-\frac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right) \tag{8.73}$$

通过将式(8.73)代入式(8.68)和式(8.69)，并对其进行拉普拉斯变换，得到横摆角速度对转向盘转角输入响应的 $r(s)/\delta(s)$，即：

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{2K_fV}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)}\left(\frac{1+\dfrac{ml_fV}{2lK_r}s}{1+d_1s+d_2s^2}\right) \tag{8.74}$$

其中，

$$d_1=\frac{ml_f[mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)]+2I(K_f+K_r)}{2lK_r[mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)]}V$$

$$d_2=\frac{mIV^2}{2lK_r[mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)]}$$

上式就是采用横摆力矩正比于横摆角速度的直接横摆力矩控制算法时，稳态零侧偏角车辆横摆角速度对转向盘转角输入的响应。

由上面的推导可知，通过调节参数 K_δ 和 K_r，式(8.72)和式(8.74)描述的稳态零侧偏角车辆运动和横摆角速度响应能够得到。

但是，重要的是更好地理解这些方程，如果车速低的情况下，$V=\sqrt{-(l_fK_f-l_rK_r)/m}$时，横摆角速度响应值的分母等于零，并且改变符号。而且，如果车速低于上式，车辆响应的特征方程中的常量将变为负且车辆变得不稳定。因此，应该理解上述的零侧偏角控制对于车辆速度足够高能实现的完全可能性条件的意义。因此，我们必须知道，上述的零侧偏角控制只有在足够高的车速的时候才有意义，且该车速必须是车辆能够达到的。

通过上面的分析可以看出，当车速高于稳态侧偏角对于前轮从正向变到负向的响应车速时，依靠直接横摆力矩控制的零侧偏角控制是可行的。下面不等式可以表示：

$$1-\frac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\leqslant 0$$

这里，直接横摆力矩控制能够控制对于前转角输入的负侧偏角，能使高速的车辆运动稳定。

下面，基于在车辆高速运动的任何时候，侧偏角总是为零，考察横摆力矩：

$$M(s)=k(s)\delta_f(s)=k(s)\frac{\delta(s)}{n} \tag{8.75}$$

代入上面的横摆力矩，拉普拉斯变换的车辆运动方程写为如下形式：

$$mVs\beta(s)+2(K_f+K_r)\beta(s)+\left[mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r)\right]r(s)=2K_f\delta_f(s) \tag{8.76}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta(s)+Isr(s)+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r(s)=[2l_fK_f+k(s)]\delta_f(s) \tag{8.77}$$

求解上面关于侧偏角的方程，并使其等于零，得到以下方程：

$$\begin{vmatrix} 2K_f & mV+\frac{2}{V}(l_fK_f-l_rK_r) \\ 2l_fK_f+k(s) & Is+\frac{2}{V}(l_f^2K_f+l_r^2K_r) \end{vmatrix}=0$$

考虑对于转向盘转角输入响应的侧偏角始终为零，求解上式中的$K(s)$，因此可以得到下面的横摆力矩$M(s)$：

$$M(s)=k(s)\frac{\delta(s)}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{4ll_rK_fK_r\left(1-\frac{ml_f}{2ll_rK_r}V^2\right)}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)}+\frac{2lK_fV}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)}s\right]\delta(s) \tag{8.78}$$

将 $K(s)$ 代入上式，且将 $\beta(s)=0$ 代入式(8.77)，得到转向盘转角输入下的横摆角速度响应为

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{1}{n}\frac{2K_fV}{mV^2+2(l_fK_f-l_rK_r)} \tag{8.79}$$

在式(8.78)和式(8.79)中，尽管零侧偏角响应的横摆角速度和对于转向盘转角输入响应的期望横摆角速度能够得到，但是我们必须注意到这样一个事实，即这些方程只有对高速行驶的车辆才是合理的。即便如此，很明显的是在直接横摆力矩控制下的零侧偏角车辆横摆角速度响应值完全小于正常的前轮操纵车辆，并且随着车速的增加而明显减小。

8.6.3　基于直接横摆力矩控制(DYC)的横摆角速度模型

这里，我们将基于直接横摆力矩控制(DYC)研究 8.4 节中所描述的横摆角速度模型。

由左、右轮胎的纵向力产生的横摆力矩 M 对转向轮的响应如下：

$$mV\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+2(K_f+K_r)\beta+\left[mV+\frac{2}{V}(k_fK_f-l_rK_r)\right]r=2K_f\frac{\delta}{n} \tag{8.80}$$

$$2(l_fK_f-l_rK_r)\beta+I\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\frac{2(l_f^2K_f+l_r^2K_r)}{V}r=2l_fK_f\frac{\delta}{n}+M \tag{8.81}$$

对其进行拉普拉斯变换，可求解得到对转向角和横摆力矩输入下的横摆角速度响应，即

$$r(s)=\frac{\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_rs)\delta(s)+G_M^r(0)(1+T_Ms)M(s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}=\frac{\omega_n^2H_M(s)}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2} \tag{8.82}$$

其中，

$$H_M(s)=\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_rs)\delta(s)+G_M^r(0)(1+T_Ms)M(s) \tag{8.83}$$

这里，

$$G_M^r(0)=\frac{(K_f+K_r)V}{2l^2K_fK_r(1+AV^2)}$$

$$T_M=\frac{mV}{2(K_f+K_r)}$$

1. 横摆角速度前馈模型的 DYC

这里，采用与后轮转向相同的横摆角速度模型响应，即：

$$r_m(s)=\frac{1}{n}\frac{G_e}{1+T_es}\delta(s) \tag{8.43}$$

如果，此响应结果与式(8.82)描述的结果一致的话，可以得到以下表达式：

$$\frac{\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_rs)\delta(s)+G_M^r(0)(1+T_Ms)M(s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}=\frac{1}{n}\frac{G_e}{1+T_es}\delta(s)$$

由此可得到 $M(s)$ 的表达式如下：

$$M(s)=\frac{1}{n}\left[\frac{G_e\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)}{G_M^r(0)(1+T_Ms)(1+T_es)}-\frac{G_\delta^r(0)}{G_M^r(0)}\frac{1+T_rs}{1+T_Ms}\right]\delta(s) \tag{8.84}$$

由于前馈控制能跟随一阶延迟横摆角速度模型响应，这就是期望的直接横摆力矩控制律。

2. 横摆角速度前反馈及反馈模型的 DYC

这里，仍然采用与上面第一部分中同样的横摆角速度模型响应。根据式(8.43)，得到式(8.43′)如下：

$$\left(s+\frac{1}{T_e}\right)r_m(s)=\frac{1}{n}\frac{G_e}{T_e}\delta(s) \tag{8.43′}$$

误差 e 还是模型横摆角速度 r_m 与对转向以及横摆力矩输入响应的车辆横摆角速度 r 之间的差值，即

$$e(s)=\left(s+\frac{1}{T_e}\right)[r(s)-r_m(s)]$$

为使一阶延迟响应误差为零，即

$$\left(s+\frac{1}{T_g}\right)e(s)=0$$

由上面两式，可得：

$$\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\left(s+\frac{1}{T_e}\right)[r(s)-r_m(s)]=0$$

该表达式可另写为如下形式：

$$\left[s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2+\left(\frac{1}{T_g}+\frac{1}{T_e}-2\zeta\omega_n\right)s+\frac{1}{T_gT_e}-\omega_n^2\right]r(s)$$

$$-\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\left(s+\frac{1}{T_e}\right)r_m(s)=0$$

代入式(8.80)和式(8.43′)，上式变为

$$\omega_n^2H_{(M)}(s)+(c_1s+c_0)r_s-\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\frac{G_e}{T_e}\delta(s)=0$$

这里，c_1 和 c_0 已在 8.4 节定义过，即

$$c_1=\frac{1}{T_g}+\frac{1}{T_e}-2\zeta\omega_n$$

$$c_0=\frac{1}{T_gT_e}-\omega_n^2$$

将式(8.81)代入以上各式，得：

$$\frac{1}{n}G_\delta^r(0)(1+T_rs)\delta(s)+G_M^r(0)(1+T_Ms)M(s)$$

$$=-\frac{1}{\omega_n^2}(c_1s+c_0)r(s)+\frac{1}{n}\frac{G_e}{\omega_n^2T_e}\left(s+\frac{1}{T_g}\right)\delta(s)$$

由此，得到直接横摆力矩控制中，以跟随模型横摆角速度响应所需要的横摆力矩如下：

$$M(s)=\frac{1}{n}\left[-\frac{G_\delta^r(0)}{G_M^r(0)}\frac{1+T_rs}{1+T_Ms}+\frac{G_e}{\omega_n^2T_gT_eG_M^r(0)}\frac{1+T_gs}{1+T_Ms}\right]\delta(s)$$

$$-\frac{c_0}{\omega_n^2G_M^r(0)}\frac{1+\frac{c_1}{c_0}s}{1+T_Ms}r(s) \tag{8.85}$$

这就是采用前馈和横摆角速度反馈控制，以跟随对转向输入的一阶延迟横摆角速度模型响应的直接横摆力矩控制律。

参考文献

[1] Y. Furukawa, Improvement of vehicle handling by 4 wheel steering system, JASE Journal, Vol. 40, No. 3, 1986(In Japanese).

[2] N. Irie, et al., Improving vehicle stability and controllability through active rear wheel steering, JASE Journal, Vol. 40, No. 3, 1986(In Japanese).

[3] M. Abe Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety from 4WS to DYC, Proceedings of the IMechE Part K, Vol. 213, 1999.

PDG

第9章　驾驶人操纵的车辆运动

9.1　引言

本书中所研究的车辆指的是，能在车辆自身运动中所产生的力的作用下，在平面内作自由运动的车辆，就如飞行器和轮船一样。

车辆在转向操作或在扰动和外力的作用下，产生侧向运动、横摆运动、俯仰运动和垂向运动。而驾驶人则根据对这些运动的观察，给车辆施加适当的转向动作来控制车辆运动，以获得他的期望路径。

在前面章节中，我们已对车辆固有的运动特性进行了相当详尽的研究，重点集中在车辆对转向和扰动的运动响应。然而，先前的研究均基于这样的假设，即驾驶人没有主动地对车辆施加有目的的转向控制。

基于固定于地面的坐标系，车辆对转向和扰动的运动响应分别由式(3.87′)、式(3.88′)、式(4.11)和式(4.12)给出的传递函数来表示。这些方程中包含了分别对转向和干扰的车辆侧向位移和横摆角积分项 $1/s^2$ 和 $1/s$，表明车辆在未被施加适当控制的情况下，对转向输入的响应值会随车辆运动时间的增加而增加。就此意义上讲，可以说：车辆的运动相对于绝对坐标系本质上是“不稳定”的。这也说明了，为什么当施加适当的转向输入时，车辆可以在平面上自由运动，也就是说，车辆存在着这样一个无约束的、而且是“不稳定”的自由度。

迄今为止，人们尚未将这个“不稳定”的车辆运动特性作为一个主要因素来考虑。而这样的一种处理方法在车辆动力学研究中是不完整的。车辆是能够在驾驶人的适当转向输入下按其驾驶意图正确行驶的。因此，在绝对坐标系中，有必要理解当驾驶人根据车辆的运动状态有意图地对其施加转向输入时，车辆是如何运动的。

9.2 驾驶人的控制行为

在操作员控制机器工作的情况下中，作为控制器的人，在决定机器运动过程中扮演着重要角色。此时，在对运动体的考察过程当中，总会有的一个问题是，如何对作为控制器的人进行描述。

关于这一问题，一些研究者已经对人的操纵功能进行了开创性的研究，并取得了许多有价值的成果。然而，在这些前期的研究中，即使只考虑上述有关人作为控制器的功能，人与人之间也是各不相同的，其描述也不尽一致。即使采用同样的处理方法，也未必能描述出每一情况。此外，在前面的章节中，通过扩展基于牛顿定律的基础运动方程的理论，我们就能推导出可清晰描述车辆运动特性的表达式，即使是当中忽略了某些次要的影响因素。换言之，车辆的运动特性本质上是具有理论保证的，可以用数学方程对其进行描述。相反，当考虑到人的因素时，却无法明确地保证，即没有一个确定的、能完全描述人的控制行为的数学方程。

然而，假若我们对人的操纵行为仔细观察，在机器控制的角度上看，人的因素还是存在一些规律性行为的。因此，我们可以推导模拟人的行为规律的模型，以用来表示作为控制器的人的功能。

这类似于控制工程中使用的黑箱的概念。事实上，现代自动控制理论可以方便地应用于人的控制行为，使研究者可以理解人的控制功能，并对由人操纵的机器进行有效的设计与开发。一个普遍的做法是，将人的控制行为处理为一个连续线性反馈控制，并以传递函数表示之。针对不同的情况，已有各种关于人的行为的传递函数被提出。

被提出的人为控制器的传递函数参见表9.1。所有这些传递函数都有着几乎同样的特性。这里，采用下面的传递函数为例，如下所示：

$$H(s)=h\left(\tau_D s+1+\frac{1}{\tau_I s}\right)e^{-\tau_L s} \tag{9.1}$$

现在，我们可以对人为控制的物理意义进行更详细的研究。

表 9.1　人控制器的传递函数

1	$K\dfrac{(1+Ts)}{s}e^{-\tau s}$	Tustin
2	$K\dfrac{(T_1s+1)e^{-\tau s}}{(T_2s+1)(T_3s+1)}$	McRuer & Krendel
3	$K\left(T_1s+1+\dfrac{1}{T_2s}\right)e^{-\tau s}$	Ragazzini
4	$K\dfrac{(A_ns^n+\cdots+A_0)}{s^1(B_ms^m+\cdots+B_0)}e^{-\tau s}$	Jackson

首先，在给定的激励（输入）下，操作人在给出一个动作（输出）的过程中，将存在一个时间延迟，以 $e^{-\tau_L s}$ 来表示，其中以 τ_L 表示延迟时间。操作者可以用舒适的、最小的工作负荷操作方式输出一个与输入信号成比例的信号（即所谓的比例控制），对此我们以比例因子 h 来表示。操作人还可以对输入信号的变化量进行预测控制，此时的输出信号是输入信号的变化率（即输入信号的微分值），也就是所谓的微分控制，对此我们以微分时间 τ_D 来表示。操作人还可以进行积分控制，即使输出信号与输入信号的积分成比例，表示当偏离起始点时，操作人有能力将其纠正过来，这里以积分时间 τ_I 来表示。

综合以上这些控制行为，人的控制传递函数 $H(s)$ 便表示成了式(9.1)的形式。

作为控制器的人不同于通常的控制系统，其最独特的特点体现在这样一个事实：其传递函数中的参数 h、τ_D、τ_I 可以在可能的范围内变动，以实现更好的控制。该特点一般被称为对控制系统控制行为的自适应性。在参数 h、τ_D、τ_I 中，人可以轻松地改变比例因子 h，但其他参数则受一定的局限，特别是要增加微分动作，对人而言并不轻松。如果控制目标需要强微分动作并达到一定程度，人也许不再有能力执行。

可以这样认为，人为控制器可以轻松、长时间、连续操作的动作是比例控制，再加上很弱的微分动作或积分动作。

9.3　驾驶人控制下的车辆运动

9.3.1　驾驶人模型

我们将上述思想用于普通人的控制行为，考察通过转向操纵车辆

运动的驾驶人控制行为。

在绝对坐标系中描述车辆对转向角输入的侧向运动，其传递函数将与式(3.87)或式(3.87′)相同。该方程表明，车辆的路径(即驾驶人的控制目标)具有近似于转向角的二次积分的特征。一般而言，对具有传递函数为$1/s^2$的控制对象，除比例动作外，还需有微分控制。

驾驶人不仅能感受到车辆的侧向位移，还能感受到车辆的姿态，即横摆角。绝对坐标系中，车辆横摆角对转向角的响应函数由式(3.88)或式(3.88′)给出，它具有近似于转向角的一阶积分特性。如果驾驶人通过感受横摆角(而不是侧向位移)来施加控制动作，那么可以期望的是，驾驶人即使没有微分动作（只是通过施加了一些与微分动作相当的动作）的情况下，也能够更好地控制车辆。

基于上述讨论，我们假定车内的驾驶人会注视车辆前方L处，并预测车辆再前进L后(即经过L/V时段后)车辆相对于目标路经的侧向位移偏移量。预测的侧向位移成为目前姿态下、L/V时段后，车辆行驶距离的一个侧向分量。驾驶人基于这个偏离量进行反馈量控制，其过程描述如图9.1所示。目前，该方法已成了最基本的、用于研究车辆运动的驾驶人控制模型。图9.2表示了该方法的框图，其中L被称为前视距离；前方L处的点被称为前视点。

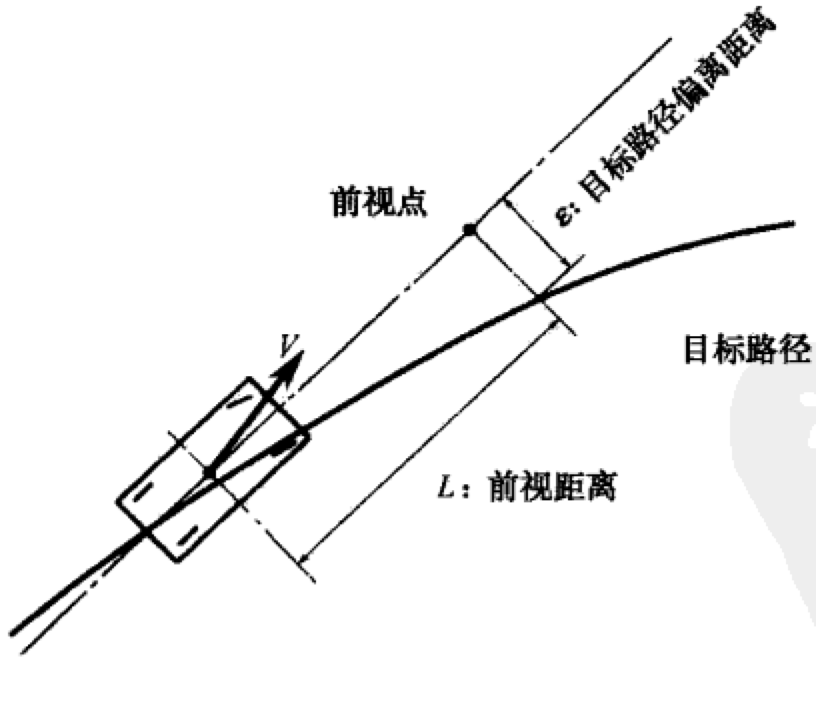


图9.1　在前方L处的路径偏离量

此时，由于车辆具有很强的积分特性，一些微分控制成分被包括

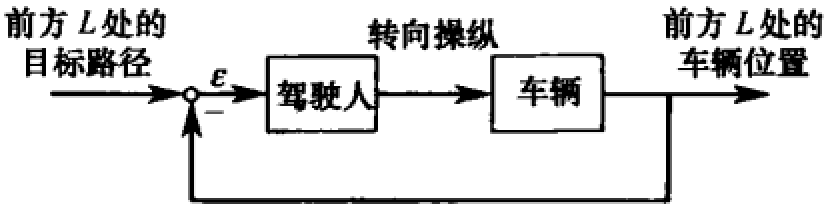


图 9.2　驾驶人-车辆闭环系统

在驾驶人控制行为的传递函数中。因此，驾驶人模型的传递函数变成：

$$H(s) = h(1 + \tau_D s)e^{-\tau_L s} \tag{9.2}$$

9.3.2　跟踪路径的车辆运动

为了考察受控车辆的运动，定义了一段包含平缓曲线、但近似为直线的目标路径，如图 9.3 所示。车辆接受到来自驾驶人的控制动作，并沿着这个目标路径行驶。如果 X 轴是沿着目标路径的方向，Y 轴则是与其垂直的方向，那么车辆的运动状态将如图 9.3 所示。

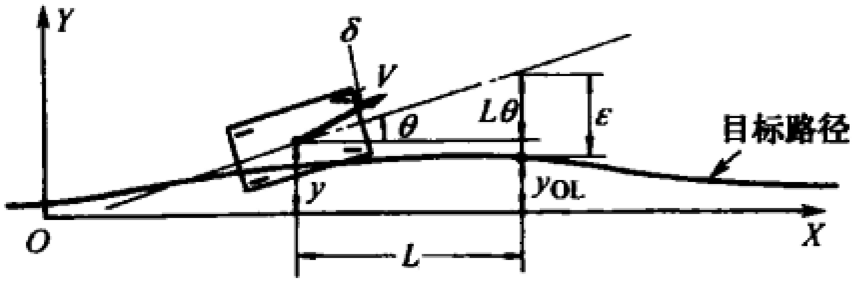


图 9.3　近似直线目标路径下驾驶人控制的车辆运动

这里，y 是车辆的侧向位移；θ 是横摆角；y_{OL}是目标路径在前视点处的侧向偏离量。由于 $|\theta| \ll 1$，可以假定车辆在前视点处的侧向偏离量为

$$\varepsilon = y + L\theta - y_{OL} \tag{9.3}$$

进而，若将车辆运动以转向角 δ 的形式表达，则 y 和 θ 对 δ 的传递函数，即 $G_y(s)$和 $G_\theta(s)$，分别由式(3.87′)和式(3.88′)给出，故有

$$G_y(s) = \frac{y(s)}{\delta(s)} = G_\delta^y(0)\frac{1 + T_{y1}s + T_{y2}s^2}{s^2\left(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{9.4}$$

$$G_\theta(s)=\frac{\theta(s)}{\delta(s)}=G_\delta^r(0)\frac{1+T_r s}{s\left(1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{9.5}$$

相对于给定目标路径的 y_{OL}，车辆运动的侧向位移 y 可由框图 9.4 表示。只要图中所示的系统稳定，即使当车辆偏离了目标路径，也会在驾驶人的控制下逐渐回归，并沿目标路径继续行驶。此时，车辆的运动还受车辆自身固有的动力学特性影响，如表示 $G_y(s)$ 和 $G_\theta(s)$ 的公式所示，同时还与由公式 $H(s)$ 和值 L 表达的驾驶人控制特性有关。

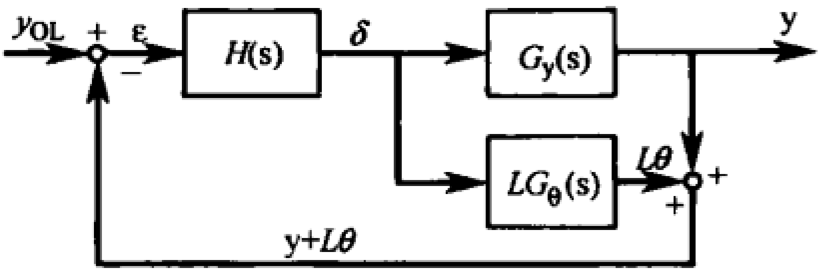


图 9.4 驾驶人-车辆系统框图

基于上述方法，车辆运动的仿真结果如图 9.5 所示。仿真中采用的驾驶人模型的传递函数不是式(9.2)，而是 $H(s)=h/(1+\tau_L s)$，以此来研究车辆在驾驶人控制下的基本运动。由图可知，驾驶人如何控制车辆以及车辆本身固有的动力学特性都极大地影响了车辆的运动。

图中这些结果表示的是，直线行驶中的车辆在质心处受到突然的、短暂的外部侧向力作用下车辆的运动。当驾驶人前视距离 L 改变时，车辆的运动情况如图 9.5a 所示；当车辆转向特性改变时，车辆的运动如图 9.5b 所示。这里的 y_{OL} 恒始终为零。

结果表明，如果前视距离 L 太短，则车辆运动发生振荡，并变得不稳定；如果前视距离 L 长，则车辆表现稳定，并能够回到目标路径。为了使车辆运动足够稳定，必须随车速的增加而增大 L。对具有过多转向(OS)特性的车辆，由于其阻尼特性差会发生振荡；而对具有不足转向(US)的车辆而言，运动会被衰减，且表现稳定。但是，对那些表现出很强 US 特性的车辆，由于侧向位移很大，反而会弱化

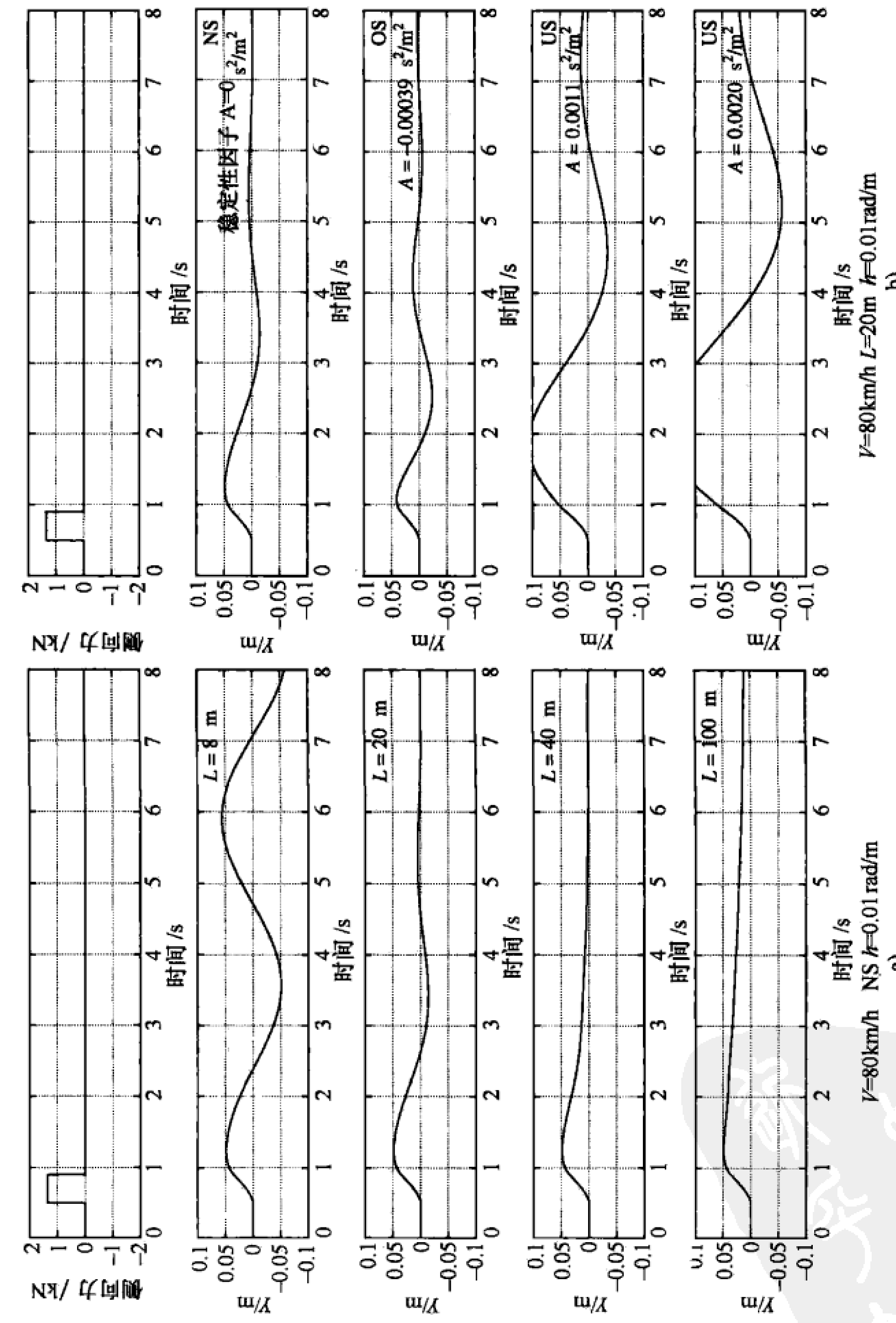


图 9.5　由模型化的驾驶人控制的车辆运动

a) L 改变时车辆的运动情况　b) 转向特性改变时车辆的运动情况

其阻尼特性。另外还可以发现，对受控制车辆的路径跟踪性能来看，如果前视距离太大或车辆表现出太多的 US 特性，则其路径跟踪能力也会变差。

9.3.3 运动稳定性

接下来，我们将继续上一小节，研究受驾驶人控制的车辆运动的稳定性。

根据图 9.4 所示的驾驶人-车辆系统框图，可推导得到 y 相对于 y_{OL} 的传递函数为

$$\frac{y(s)}{y_{OL}(s)}=\frac{G_y(s)H(s)}{1+H(s)[G_y(s)+LG_\theta(s)]} \tag{9.6}$$

因此，可得受控车辆的特征方程，即

$$1+H(s)[G_y(s)+LG_\theta(s)]=0 \tag{9.7}$$

将式(9.2)、式(9.4)和式(9.5)代入式(9.7)，可得到最终的特征方程。然而，该特征方程的形式又过于复杂。因此，我们先要对车辆的特性进行简化，以理解受驾驶人控制的车辆稳定性的基本特性。

根据式(3.78)，并假定 $K_f=K_r=K$、$l_f=l_r=l/2$ 的情况下，可以近似得到相对前轮转角输入的横摆角速度响应函数，即

$$\frac{r(s)}{\delta(s)}=\frac{V}{l}\frac{1}{1+t_r s} \tag{9.8}$$

其中，

$$t_r=\frac{mV}{4K} \tag{9.9}$$

对转向输入的横摆角响应被描述为

$$G_\theta(s)=\frac{\theta(s)}{\delta(s)}=\frac{V}{l}\frac{1}{1+t_r s}\frac{1}{s} \tag{9.10}$$

假定侧偏角很小，则侧向加速度可表示为

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Vr=\frac{Vd\theta}{dt}$$

于是，对转向输入的侧向位移响应被描述为

$$G_y(s)=\frac{y(s)}{\delta(s)}=\frac{V^2}{l}\frac{1}{1+t_r s}\frac{1}{s^2} \tag{9.11}$$

这里，将式(9.2)、式(9.10)和式(9.11)代入式(9.7)，则可给出如下特征方程：

$$s^2+\frac{V^2}{l}\left(\frac{L}{V}s+1\right)\frac{h(1+\tau_D s)\mathrm{e}^{-\tau_L s}}{1+t_r s}=0 \tag{9.12}$$

进一步再简化，认为长时间连续控制操作的情况下，驾驶人无微分控制动作，即意味着 τ_D 为零。从而，驾驶人延迟时间可近似为

$$\mathrm{e}^{-\tau_L s}\approx\frac{1}{1+\tau_L s} \tag{9.13}$$

现在，特征方程变为

$$s^2+\frac{V^2}{l}\left(\frac{L}{V}s+1\right)\frac{h}{(1+t_r s)(1+\tau_L s)}=0 \tag{9.14}$$

将前面的式(9.13)展开，可得：

$$A_4 s^4+A_3 s^3+A_2 s^2+A_1 s+A_0=0 \tag{9.14'}$$

其中，

$$\begin{aligned}A_4&=\tau_L t_r\\A_3&=\tau_L+t_r\\A_2&=1\\A_1&=\frac{hL}{l}V\\A_0&=\frac{h}{l}V^2\end{aligned} \tag{9.15}$$

由于所有的系数 $A_i(i=1\sim4)$ 均为正数，则驾驶人-车辆系统的稳定条件为

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_0 & 0\\A_3 & A_2 & A_1\\0 & A_4 & A_3\end{vmatrix}=A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4>0 \tag{9.16}$$

将式(9.15)带入不等式(9.16)，则有

$$\frac{h}{l}V\left[(\tau_L+t_r)L-(\tau_L+t_r)^2V-\frac{hL^2V}{l}\tau_L t_r\right]\geqslant0 \tag{9.16'}$$

因为 h、l 和 V 均为正值，则有

$$h\leqslant\frac{\tau_L+t_r}{\tau_L t_r}\frac{l}{LV}\left[1-\frac{V(\tau_L+t_r)}{L}\right] \tag{9.17}$$

在给定 τ_L、t_r、l、和 V 值的条件下，上述不等式为我们在 h-L 平面上给出了驾驶人参数的稳定范围。

如果 τ_L 和 t_r 均可以小到足以忽略不计，则可用如下特征方程取代式(9.14′)，即

$$s^2+\frac{hL}{l}Vs+\frac{h}{l}V^2=0 \tag{9.14″}$$

由于该方程的所有系数均为正值，所以只要 h 和 L 的值为正，该方程所描述的驾驶人-车辆系统就是稳定的。这意味着，只有在驾驶人或者车辆系统有响应延迟的情况下，驾驶人-车辆系统才会变得不稳定。

驾驶人的延迟时间 τ_L 不可能完全为零。并且，相应于驾驶人输入到转向轮，从驾驶人的手到前轮转角这个机械系统也必然会导致一些前轮转角的响应延迟。因此，设定延迟时间 $\tau_L=0$ 是不合理的。

另一方面，当车速 V 较低、且质量 m 相对于 K 较小时，如式(9.9)给出的车辆响应延迟时间 τ_r 可视为零，则在此情况下，系统的特征方程可改为如下形式：

$$A_3s^3+A_2s^2+A_1s+A_0=0 \tag{9.14‴}$$

其中，

$$\begin{aligned}A_3&=\tau_L\\A_2&=1\\A_1&=\frac{hL}{l}V\\A_0&=\frac{h}{l}V^2\end{aligned} \tag{9.15′}$$

上述方程的稳定条件是

$$A_1A_2-A_0A_3\geqslant 0$$

将式(9.15′)代入上式，可得：

$$\frac{hV}{l}(L-V\tau_L)\geqslant 0$$

也就是说，当 L 大于 τ_L 时，驾驶人-车辆系统是稳定的。

显然，要使系统稳定，驾驶人的前视距离应该具有下限值限制。该下限值取决于驾驶人响应延迟时间及临界前视距离（等于车辆以速

度 V 在延迟时间 τ_L 内行驶的距离)。于是，我们将 L/V 称为驾驶人的预瞄时间，且当预瞄时间大于延迟时间 τ_L 时，系统是稳定的。

如果车辆运动的响应延迟可以忽略，且同时满足任一条件，驾驶人-车辆系统总是稳定的。这些条件是：①前视距离大于车辆在驾驶人反应延迟时间段内行驶的距离；②预瞄时间大于延迟时间。只要上述两条件中的任何一个成立，稳定性就可以得到保证，且不论驾驶人模型中的比例因子 h 大小如何。

当驾驶人和车辆的响应延迟均不可忽略时，系统的稳定性条件由前面给出稳定域的式(9.17)描述。在 h-L 平面上稳定区域的计算结果如图 9.6 所示，表明了驾驶人控制增益 h 的上限值的变化情况：即先是随车辆的响应延迟趋于显著时急速增加；相对车速的变化尤为明显，随车速的增加 h 的上限值迅速降低。

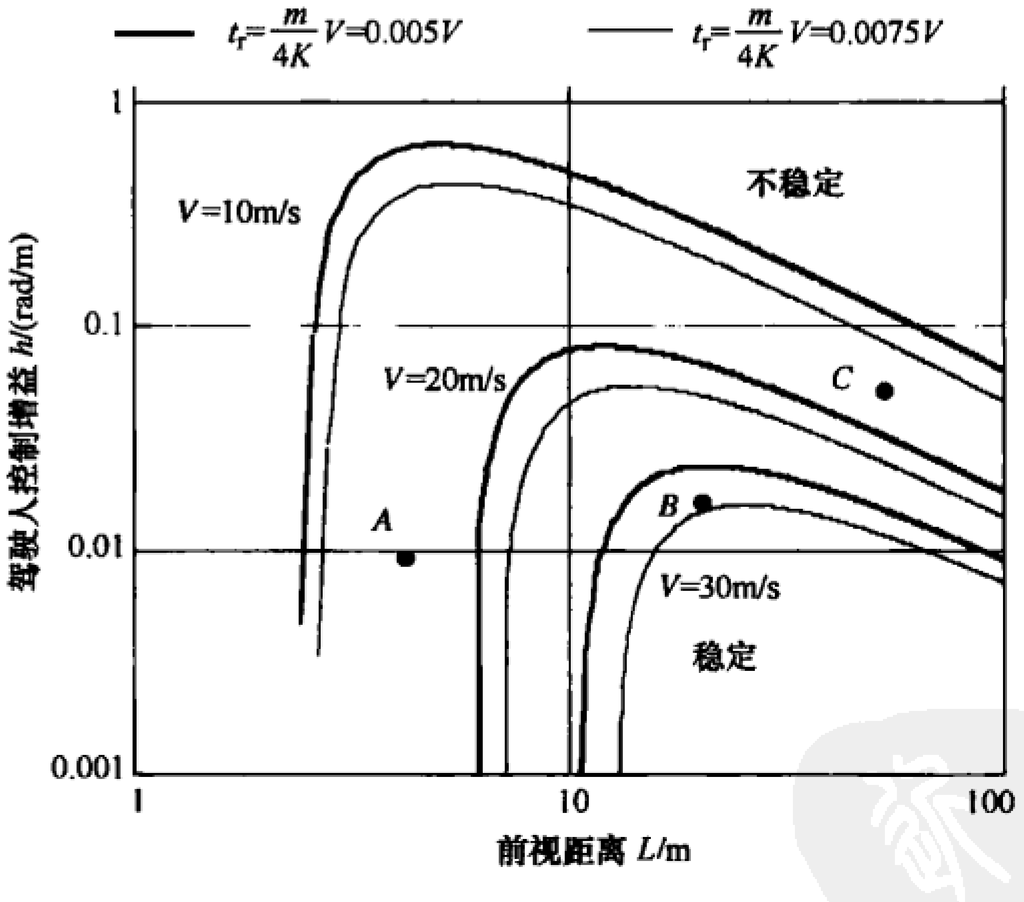


图 9.6　h-L 平面内的稳定域

以式(9.6)、式(9.10)和式(9.11)表示的驾驶人-车辆系统，在移线试验中的计算结果如图 9.7 所示。其仿真条件具体：y_0 为 3.5m，车速为 20m/s，$t_r=0.1$s，$\tau_L=0.1$s。采用的驾驶人模型的传递函数由式(9.18)所示，其中的参数分别相应于图 9.6 中的 A 点、B 点和 C

点，传递函数方程如下：

$$H(s) \approx \frac{h}{1 + \tau_L s} \tag{9.18}$$

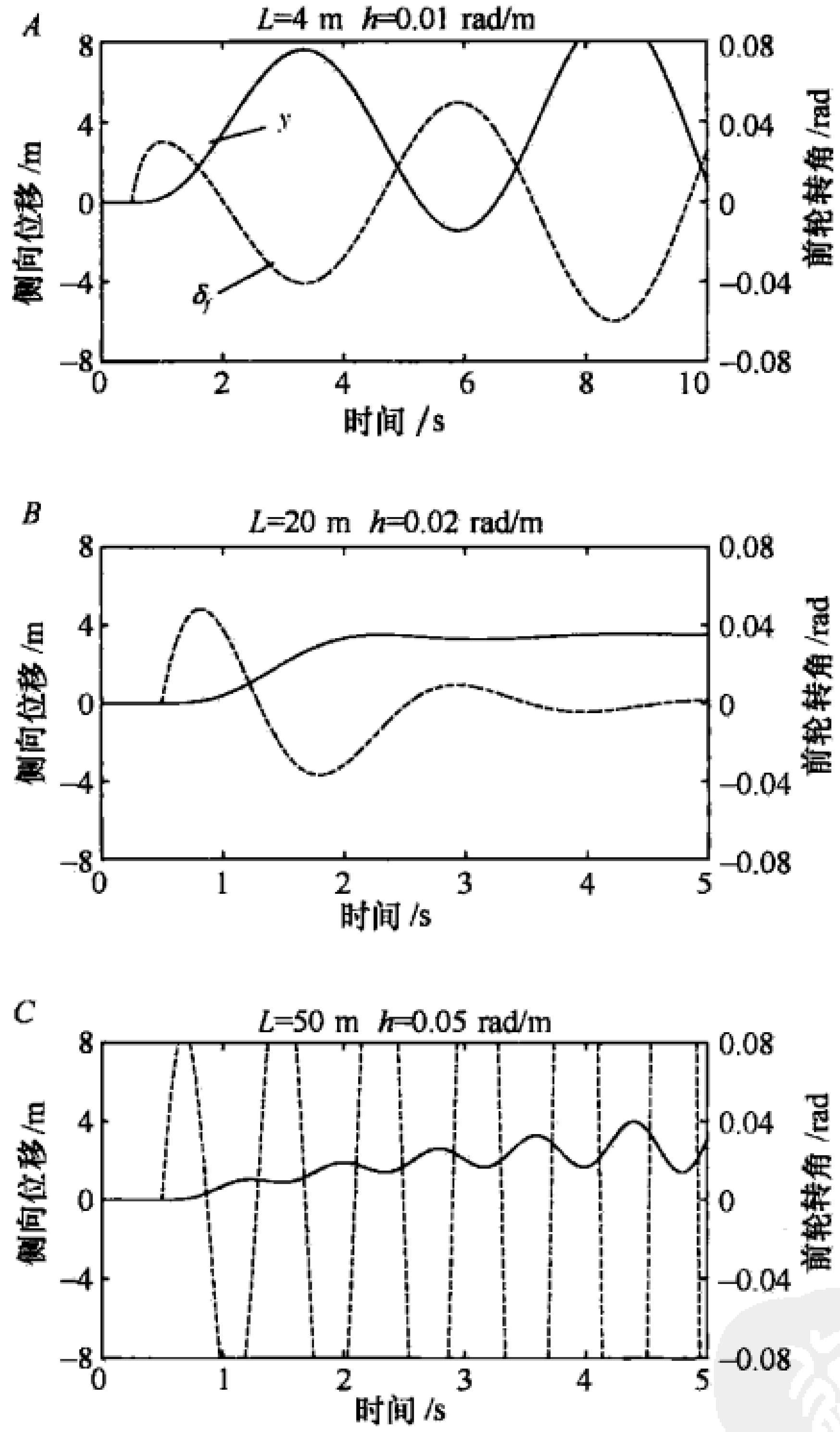


图 9.7　简化的人-车系统移线试验响应

有意思的是，当驾驶人模型的参数超出稳定区域（例如 A 点和 C 点）时，驾驶人-车辆系统出现振荡，且为不稳定。

例题 9.1

考察驾驶人施加的微分控制动作是如何使驾驶人-车辆系统稳定的。

题解：采用式(9.10)和式(9.11)作为车辆对转向输入的响应函数，并采用方程 $e^{-\tau_L s}=1/(1+\tau_L s)$ 表示延迟，则驾驶人-车辆系统的特征方程变为

$$s^2+\frac{V^2}{l}\left(\frac{L}{V}s+1\right)\frac{h(1+\tau_D s)}{(1+t_r s)(1+\tau_L s)}=0 \qquad (E9.1)$$

这里，如果驾驶人以微分时间常数 τ_D 控制车辆，并有几乎同样的时间延迟 τ_L，则特征方程变为

$$t_r S^3+S^2+\frac{hLV}{l}S+\frac{hV^2}{l}=0$$

于是，稳定性条件为

$$\frac{hV}{l}(L-Vt_r)\geqslant 0 \text{ 或 } L\geqslant Vt_r \qquad (E9.2)$$

假若驾驶人的微分时间几乎等于车辆的响应时间 t_r，则特征方程变为

$$\tau_L s^3+s^2+\frac{hlV}{l}s+\frac{hV^2}{l}=0$$

则此时的稳定性条件变为

$$\frac{hV}{l}(L-V\tau_L)\geqslant 0 \text{ 或 } L\geqslant V\tau_L \qquad (E9.3)$$

由上可知，如果驾驶人采用的微分时间几乎等于其延迟时间或车辆的响应时间，则在 h-L 平面上，系统的稳定性极限范围也可以变宽，并且增益 h 的上限值也消失了。

至此，为保证车辆在驾驶人控制下稳定，我们考察了比例因子 h 和前视距离 L 的取值范围。但由此我们只能判别运动是否稳定，却不能确定其稳定的程度是多少。

山川(Yamakawa)[1]以 $H(s)=h(1+\tau_D s)e^{-\tau_L s}$ 作为驾驶人模型的传递函数，并采用相当于式(9.4)和式(9.5)的公式，求解了驾驶人控制下车辆特征方程的根，其中两个结果如图 9.8 和图 9.9 所示。

图 9.8 表示改变人的延迟时间 τ_L 和比例因子 h 时的系统根轨迹。由图可见，延迟时间 τ_L 的存在是引起车辆运动变为不稳定的基本原

因。如果比例因子 h 过大，车辆运动将变得不稳定。图 9.9 表示改变车辆的稳定域度(SM)和比例因子 h 时的系统根轨迹。由图可见，如果车辆具有 US 特性，即具有更大的稳定域度，车辆运动将变得更加稳定。

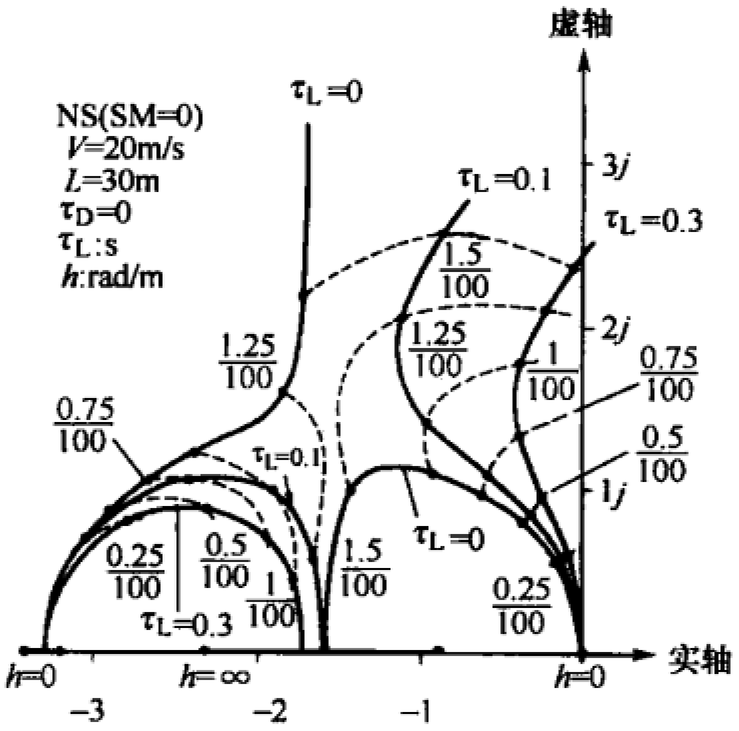


图 9.8　改变 τ_L 和 h 时的系统根轨迹

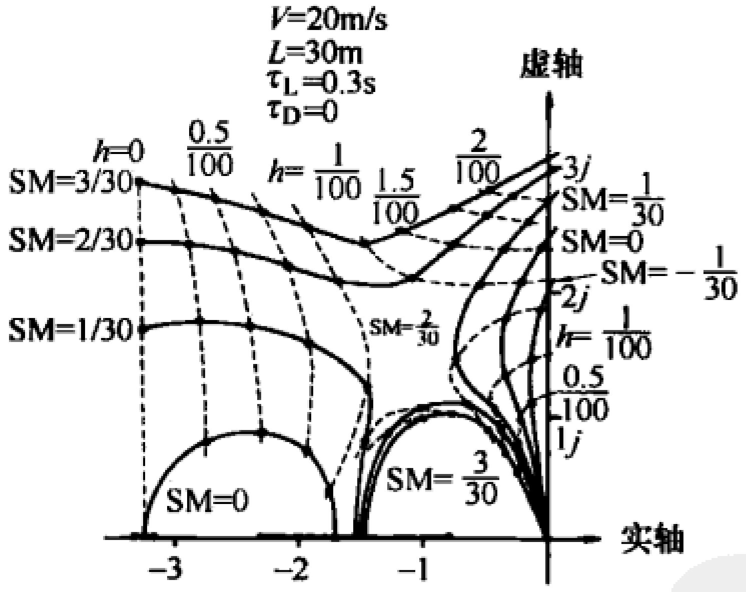


图 9.9　改变 SM 和 h 时的系统根轨迹

9.4　驾驶人对车辆特性的适应性和移线行为

到目前为止，车辆的运动特性和驾驶人的控制行为一直是分开研究的。然而，不同于普通的机械控制器，人的独特之处就是具备改变其控制行为的能力，以产生一个适当的操作来符合控制目标。

为简单起见，设式(9.12)中 t_r 为零，则可得到以下特征方程：

$$s^2+\frac{V^2}{l}\left(\frac{L}{V}s+1\right)h(\tau_D s+1)\mathrm{e}^{-\tau_L s}=0 \qquad (9.12')$$

如果驾驶人以与车速的平方和前视距离成反比、与车速 V 成正比地改变比例因子 h，则即使车速 V 变化时，上述方程也不变。在此情况下，车辆运动也将不随车速发生太大的变化。驾驶人并非独立于车辆的运动特性，他(她)可以表现得如同一个控制器那样，巧妙地改变自身的控制特性，以适应车辆的特性。

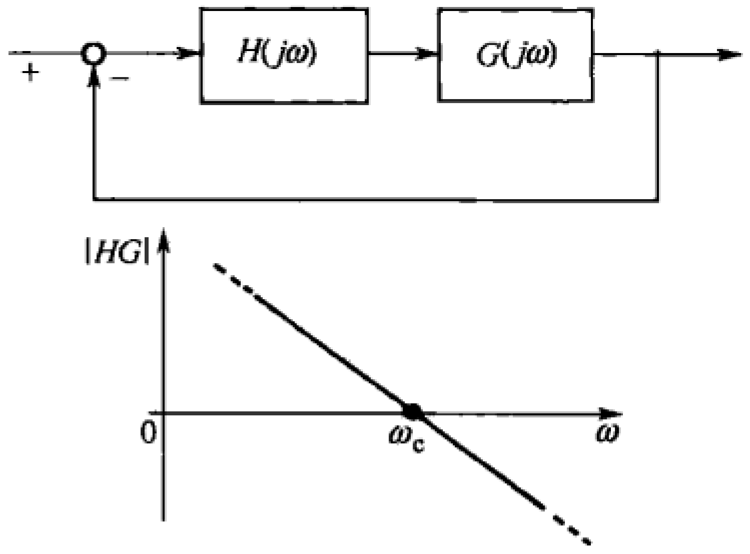


图 9.10　人对机械特性的适应性

对人为控制器，有人已经提出了一个通用的方法，以试图对其自适应行为进行理解。McRuer[2] 假定人为控制器如 9.2 节所描述那样、是一个连续的线性反馈控制器，由此建立了人的控制行为的模型，研究结果表明人(他或她)对机械特性的适应性很好，如图 9.10 所示。其中，$G(j\omega)$ 表示控制对象，$H(j\omega)$ 表示人的控制行为；驾驶人通过调整 $H(j\omega)$ 以适应 $G(j\omega)$ 的变化，使其在“交叉频率”(即当开环频率响应函数 $|H(j\omega)G(j\omega)|$ 为 1 的频率) 附近，则有

$$H(j\omega)G(j\omega)\approx\frac{\omega_c \mathrm{e}^{j\omega\tau}}{j\omega} \qquad (9.19)$$

式中，τ 为人体肌肉的时间延迟。

上述模型被称之为“交叉模型”，用来研究驾驶人对车辆特性变化的适应性。

在不同车速及几组不同驾驶人参数 h-L 组合下，车辆移线试验的仿真结果由图 9.11 给出。图中可见，驾驶人是可以根据不同的车速调整其自身参数的。如本节开头所预测的那样，驾驶人模型参数 h 和 L 显然会适应于车速的改变，以使得在整个移线过程中保持一致、协

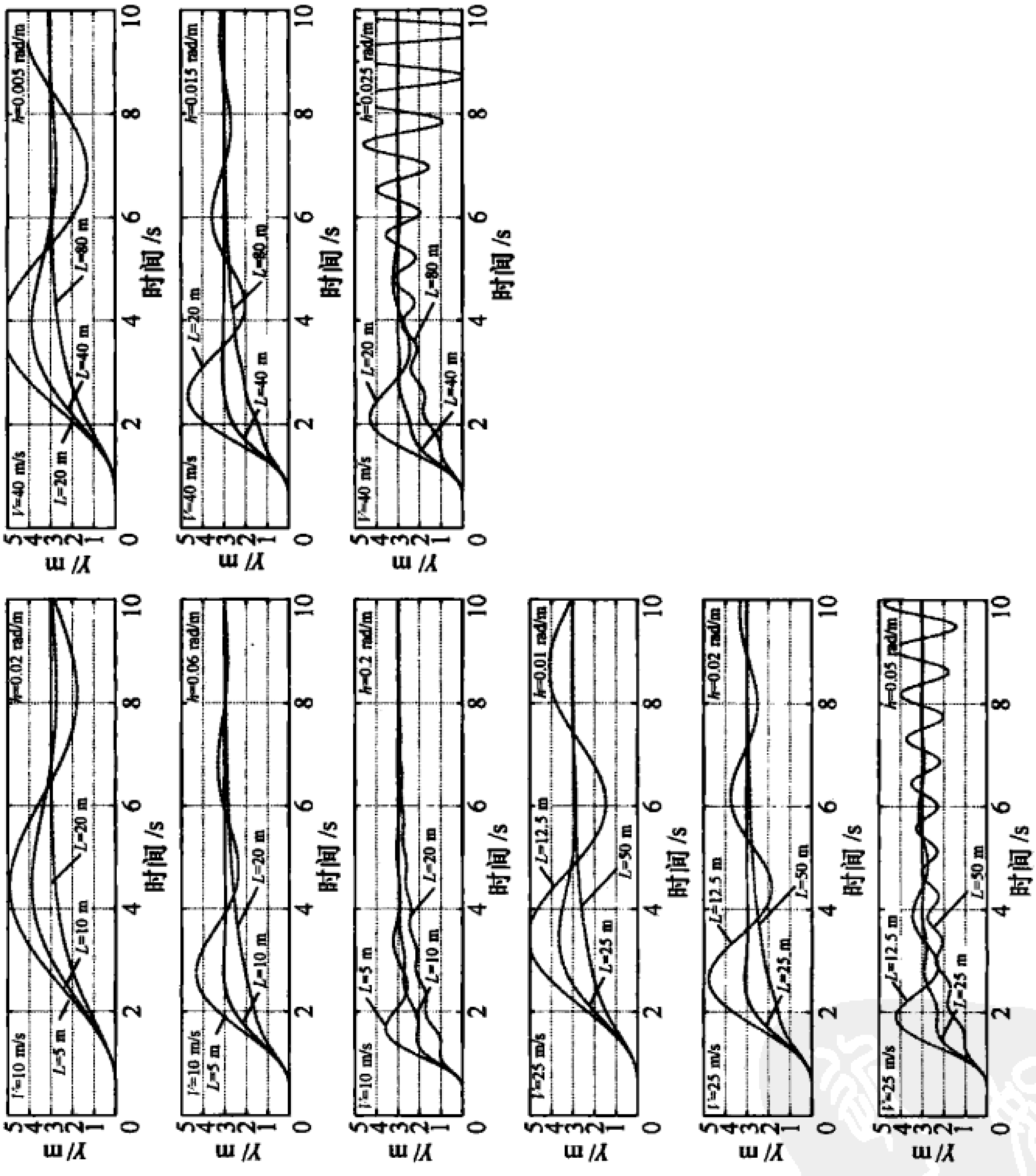


图 9.11　不同行驶速度下驾驶人模型参数对车辆运动的影响

调的驾驶行为。

例题 9.2

为比较具有强不足转向(US)和强过多转向(OS)特性的车辆与具有正常转向特性车辆的移线行为，用 Matlab-Simulink 对如图 9.11 所示的车辆移线过程进行仿真试验，以考察当车辆转向特性发生改变的情况下，驾驶人是如何自适应于车辆，从而保持移线试验中协调一致的行为。

题解：采用式(3.21)和式(3.22)，可以方便地模拟沿直线行驶的车辆在移线过程中的运动。采用式(9.2)来求在移线过程中前视距离 L 的处侧向偏离量；式(9.18)作为驾驶人模型的传递函数。则上面方程改写为仿真所需的积分形式如下：

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2(K_f + K_r)}{mV}v - \frac{2(l_fK_f - l_rK_r)}{mV}r + \frac{2(K_f + K_r)}{m}\theta + \frac{2K_f}{m}\delta \tag{E9.4}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2(l_fK_f - l_rK_r)}{IV}\frac{dy}{dt} - \frac{2(l_f^2K_f + l_r^2K_r)}{IV}\frac{d\theta}{dt} + \frac{2(l_fK_f - l_rK_r)}{I}\theta + \frac{2l_fK_f}{I}\delta \tag{E9.5}$$

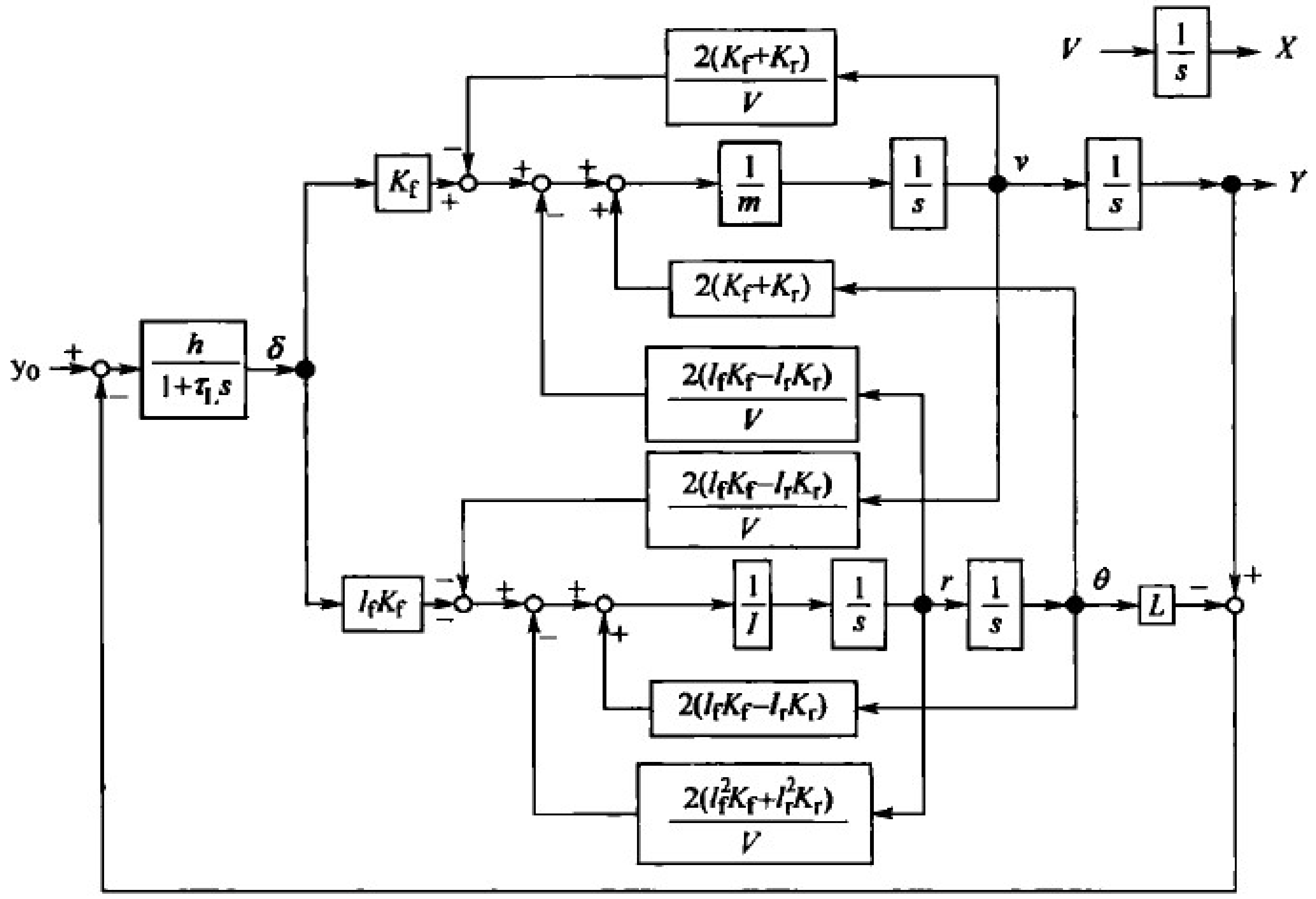
$$\frac{dy}{dt} = v \tag{E9.6}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r \tag{E9.7}$$

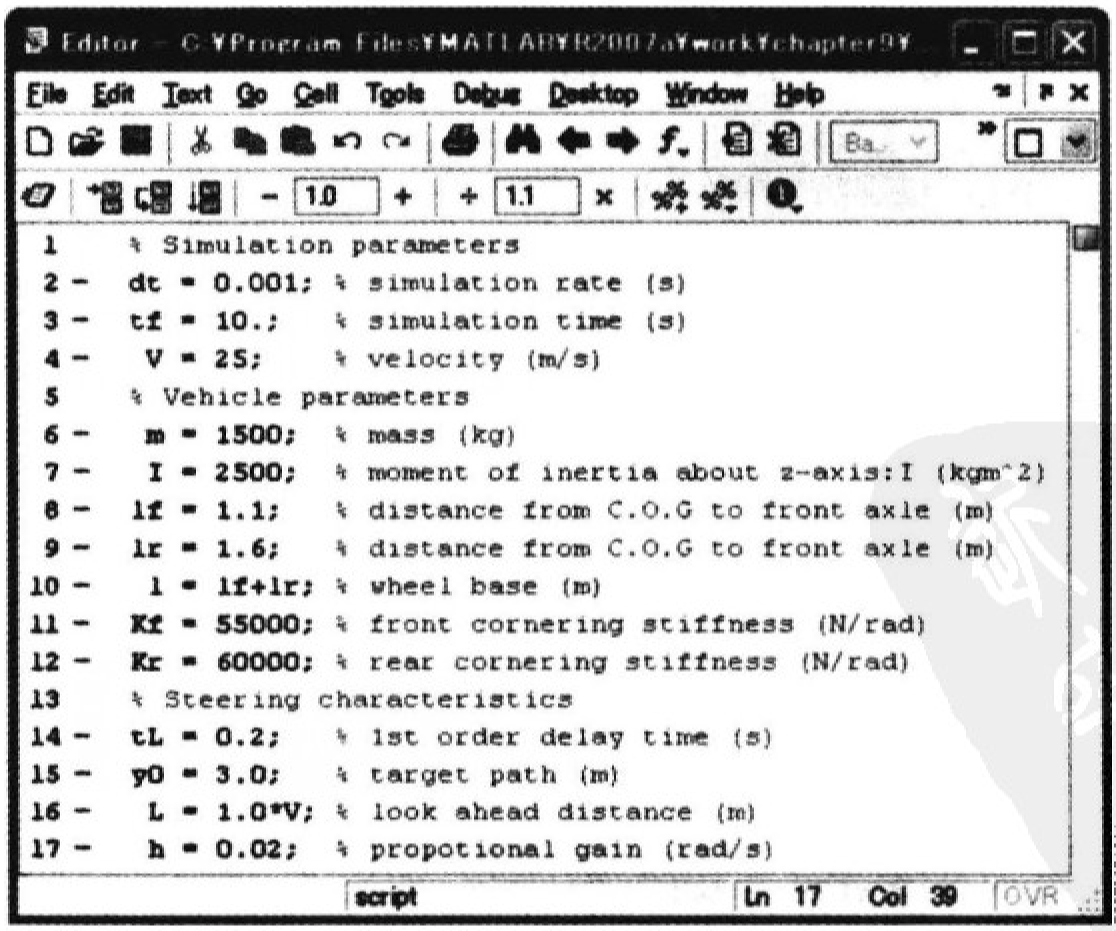
$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{\tau_L}\delta - \frac{h}{\tau_L}(y + L\theta - y_{OL}) \tag{E9.8}$$

根据上述方程，得到的仿真试验框图如例题 9.2 图 a 所示；驾驶人-车辆系统仿真参数如例题 9.2 图 b 所示；仿真程序如例题 9.2 图 c 所示；例题 9.2 图 d 给出的是仿真结果。

总结得出的仿真结果由例题 9.2 图 e 所示。由图可以看出，与正常转向特性的车辆相比，如果车辆具有强 US 特性，驾驶人应该增加比例因子 h，并减小前视距离 L；反之，如果车辆变为强 OS 特性，驾驶人应该减小比例 h 因子，并增加前视距离 L。



a)

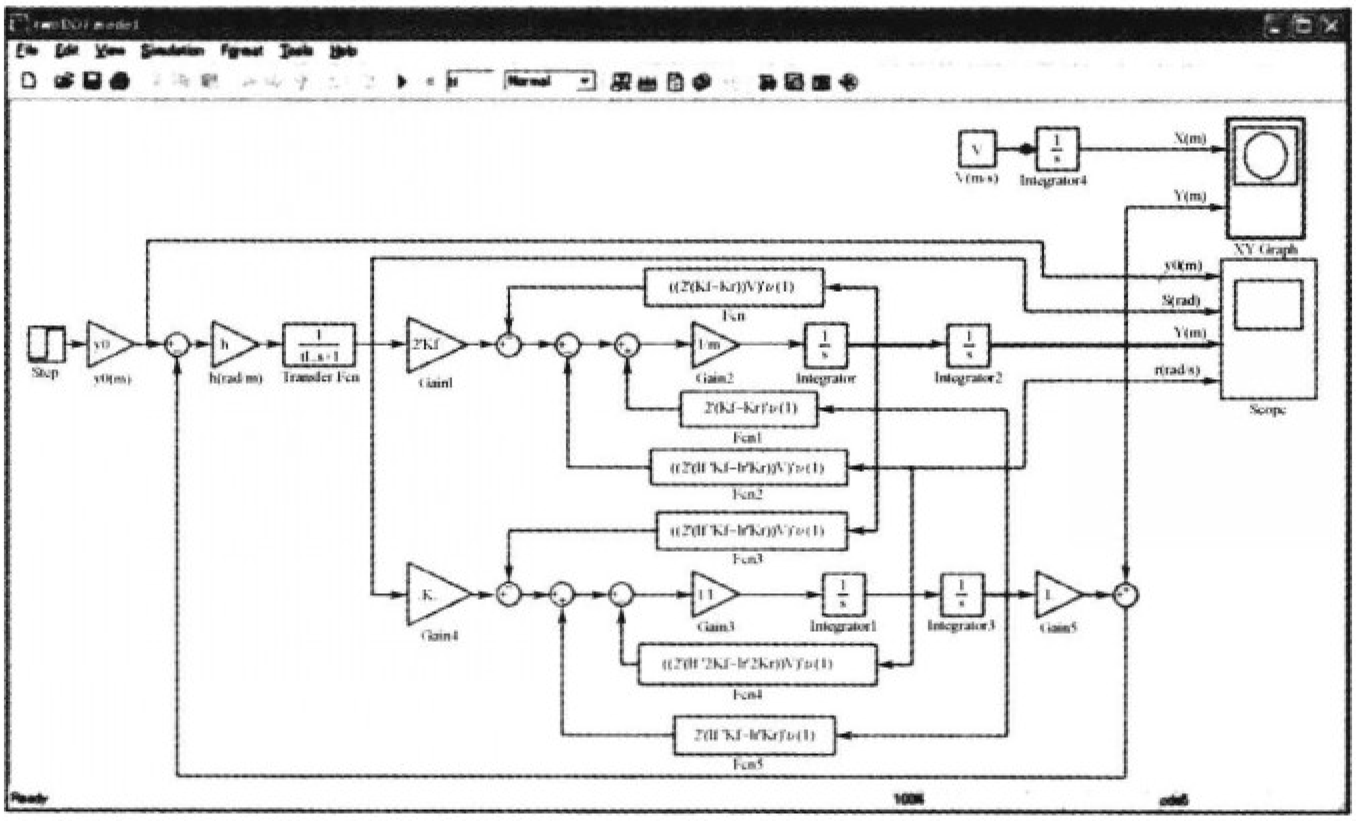


```
% Simulation parameters
dt = 0.001; % simulation rate (s)
tf = 10.;   % simulation time (s)
 V = 25;    % velocity (m/s)
% Vehicle parameters
 m = 1500;  % mass (kg)
 I = 2500;  % moment of inertia about z-axis:I (kgm^2)
lf = 1.1;   % distance from C.O.G to front axle (m)
lr = 1.6;   % distance from C.O.G to front axle (m)
 l = lf+lr; % wheel base (m)
Kf = 55000; % front cornering stiffness (N/rad)
Kr = 60000; % rear cornering stiffness (N/rad)
% Steering characteristics
tL = 0.2;   % 1st order delay time (s)
y0 = 3.0;   % target path (m)
 L = 1.0*V; % look ahead distance (m)
 h = 0.02;  % propotional gain (rad/s)
```

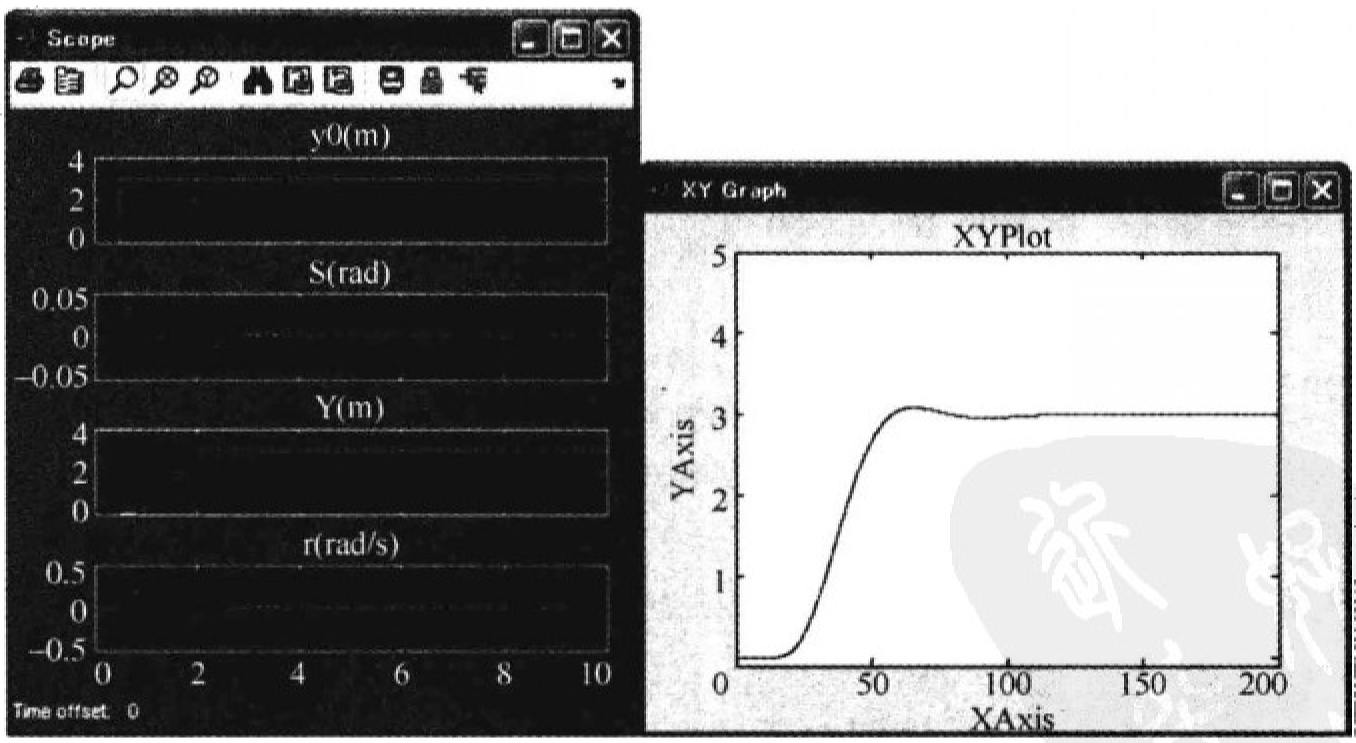
b)

例题9.2图　对车辆移线过程的仿真

a）仿真试验框图　b）仿真参数



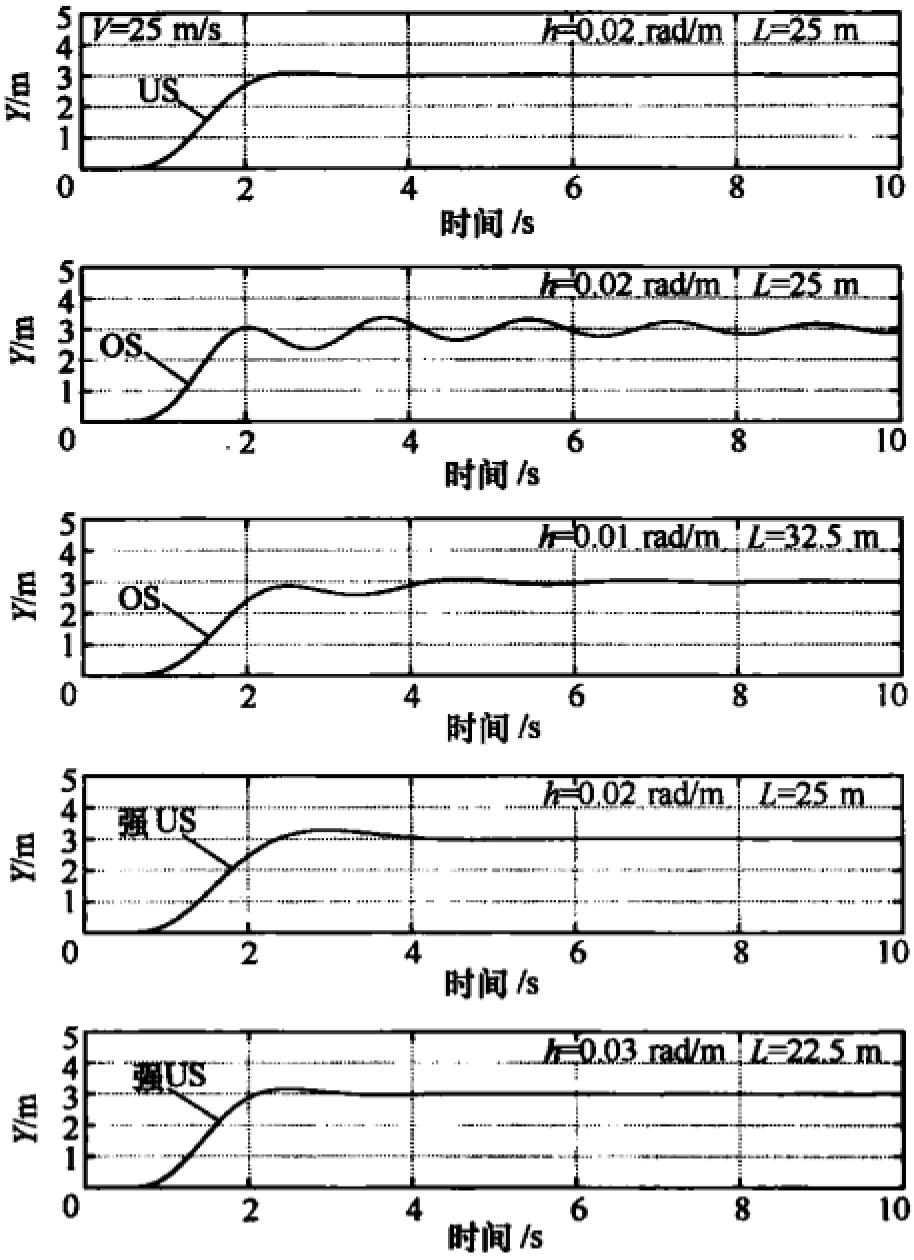
c)



d)

例题 9.2 图　对车辆移线过程的仿真(续)

c) 仿真程序　d) 仿真结果



e)

例题9.2图　对车辆移线过程的仿真(续)

e) 总结得出的仿真结果

9.5　驾驶人模型参数的辨识

本节将利用实验数据，通过采用驾驶人参数辨识的方法，试图表明驾驶人是如何随着车辆运动特性的变化去调整其自身参数的。

由于驾驶人转向行为可由式(9.2)描述，并且由驾驶人观察到的路径偏离量由式(9.3)给出，则驾驶人的转向行为表达如下：

$$\delta(s) = -h(1+\tau_D s)e^{-\tau_L s}[y(s)+L\theta(s)-y_{OL}(s)] \tag{9.20}$$

为了简化模型，并减少驾驶人模型中的参数，假定 $dy/dt \approx V\theta$（参见 9.3.3 小节），并假定驾驶人通过前视（即预瞄）行为做出等效的微分控制动作。于是，驾驶人微分时间 τ_D 几乎为零。故式(9.20)可改写为如下形式：

$$\delta(s) = -he^{-\tau_L s}\left[\left(1+\frac{L}{V}s\right)y(s) - y_{OL}(s)\right]$$

此外，假定 τ_L 的值很小，并且 $e^{-\tau_L s} \approx 1/(1+\tau_L s)$，则可得到一个用来描述驾驶人所决定的转向角的简化模型，即：

$$\delta(s) = -\frac{h}{1+\tau_L s}[(1+\tau_h s)y(s) - y_{OL}(s)] \tag{9.21}$$

假定 τ_h 代表驾驶人的前视（预瞄）和微分控制动作的综合效果，如果驾驶人的微分控制动作可以忽略不计，故此 τ_h 可被视为是预瞄时间，即 L/V。得到的简化的驾驶人-车辆模型框图如图 9.12 所示，其中，驾驶人的转向特性由三个参数描述，即 h、τ_h 和 τ_L。

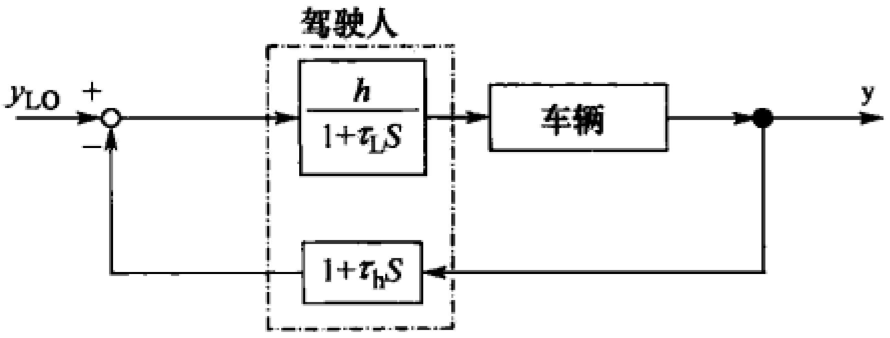


图 9.12　简化的驾驶人-车辆模型框图

接下来，我们研究这三个参数的实验辨识问题。通过直路上车辆的移线实验，可以观察到一个典型的驾驶人-车辆系统行为。根据对驾驶人的转向角 δ^* 和车辆侧向位移 y^* 所测得的时域数据结果，参数可以被辨识。

这里，驾驶人转向角是对车辆侧向位移 y^* 和移线侧向距离 y_{OL} 的响应，而 y^* 和 y_{OL} 可由式(9.21)表示的驾驶人模型估计得到。于是，我们可对测量得到的转向角 δ^* 与驾驶人的转向角之间的误差定义如下：

$$e(s) = (1+\tau_L s)\left\{\delta^*(s) + \frac{h}{1+\tau_L s}[(1+\tau_h s)y^*(s) - y_{OL}(s)]\right\}$$

$$= (1 + \tau_L s)\delta^*(s) + h[(1 + \tau_h s)y^*(s) - y_{OL}(s)] \tag{9.22}$$

若将加权误差及误差率的平方的积分定义为评价函数，则有

$$J = \int_0^T e^2 dt = \int_0^T \left\{\delta^* + \tau_L \frac{d\delta^*}{dt} + h\left[y^* + \tau_h \frac{dy^*}{dt} - y_{OL}\right]\right\}^2 dt \tag{9.23}$$

式中，T 表示驾驶人完成移线所需的、充分的长时间。

通过求解式(9.24)使评价函数 J 最小，则有可能得到参数 h、τ_h 和 τ_L 的值。

$$\frac{\partial J}{\partial h} = 0,\ \frac{\partial J}{\partial \tau_L} = 0,\ \frac{\partial J}{\partial (h\tau_h)} = 0 \tag{9.24}$$

上述方程是关于 h、τ_h 和 τ_L 的一阶线性代数方程，因而很容易求得 h、τ_h 和 τ_L 的值，即辨识得到的驾驶人模型参数。利用这些辨识的参数就可以建立辨识的驾驶人模型，以描述驾驶人的转向角，使其尽可能地接近真实的测量值。

接下来要观察的是，将上述的方法应用于实车试验场得到的移线实验数据结果。实验测试路径如图 9.13 所示，其中，移线宽度 d_C 为 3.0m；相对于 40km/h、60km/h 和 80km/h 三个不同的车速，移线的长度分别是 15m、22.5m 和 30m。

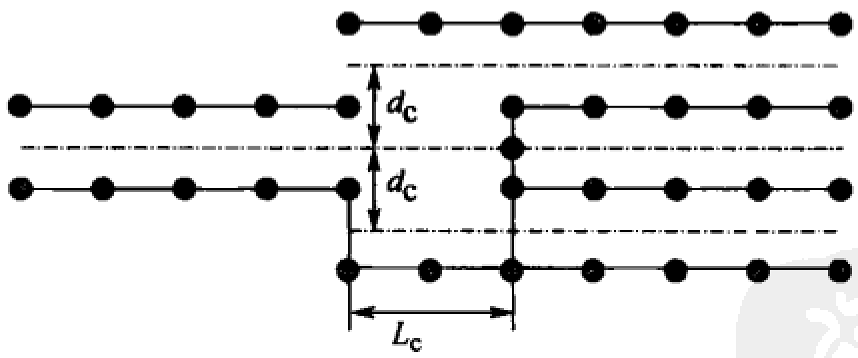


图 9.13　实车移线试验路径

估计的转向角与实际驾驶人的转向角的结果对比如图 9.14 所示，可见两者吻合得很好，说明式(9.21)充分地描述了驾驶人的转向操纵行为。同时也说明，用所辨识的参数可以反应驾驶人的特征。

对以上参数辨识的结果分别图 9.15a 和图 9.15b 给出，表明了这些驾驶人参数是如何随车速的增加而变化的。由图可知，比例增益 h

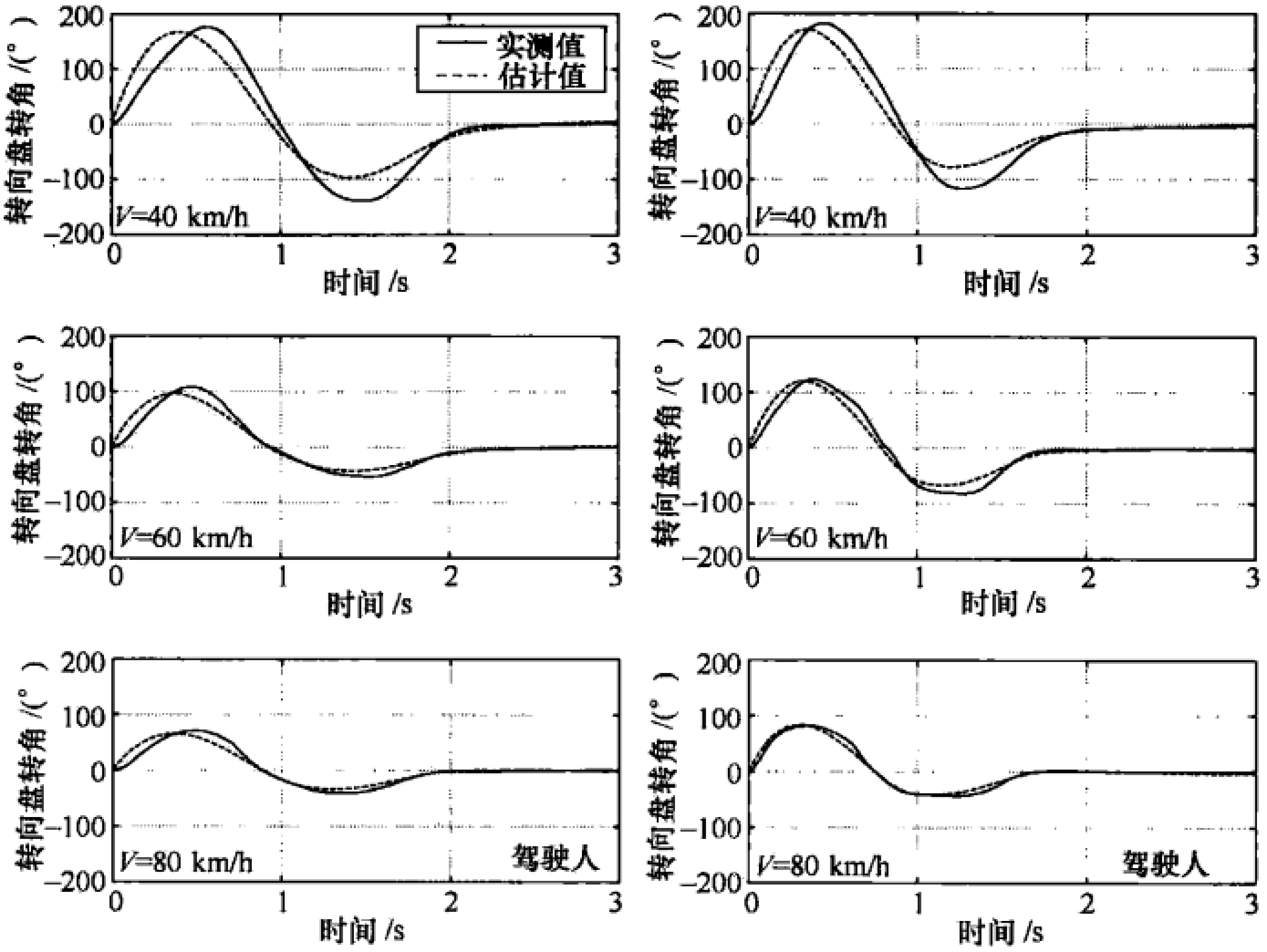


图 9.14　估计的转向角与实际驾驶人的转向角的对比

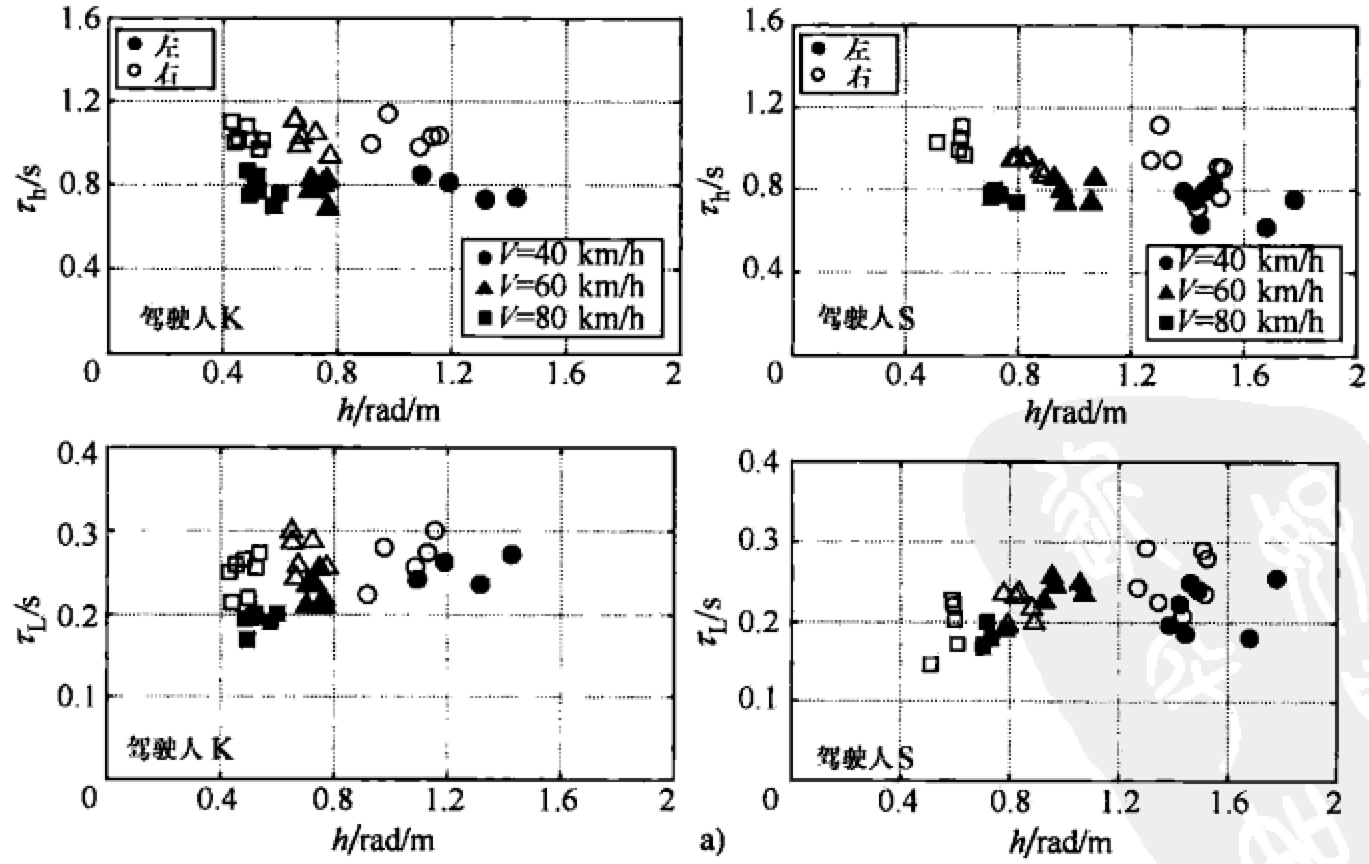


图 9.15　辨识结果

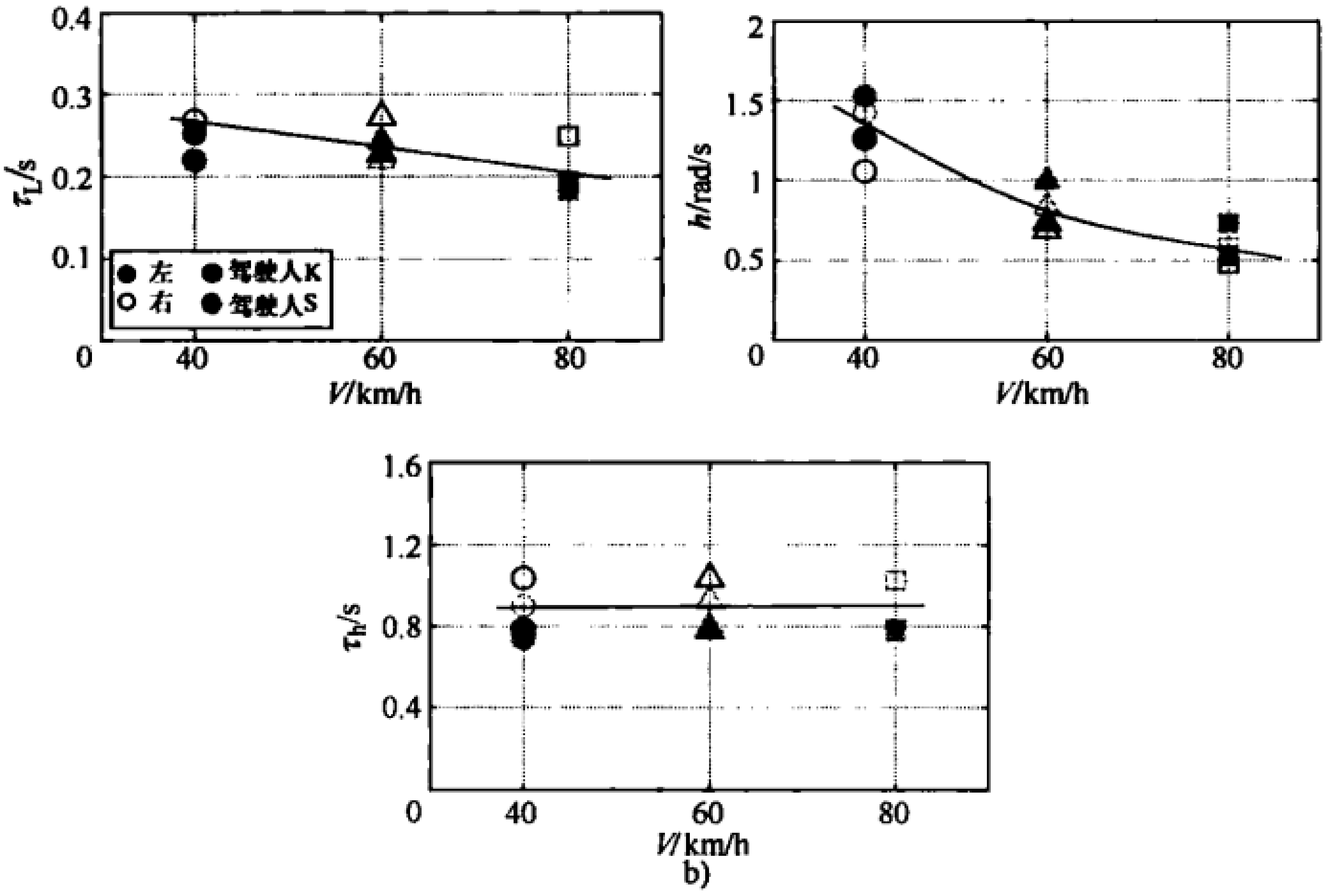


图 9.15　辨识结果(续)

随车速的增加显著减小。相反，τ_h 的值总是在 0.8 ~ 1.0s 之间，并未随车速而变化。也就是说，如果 τ_h 被近似为前视时间(即等于 L/V)，那么前视距离则与车速近似地成正比，即其值为 $0.8V \sim 1.0V$。回顾 9.4 节关于驾驶人对车辆特性的适应性的讨论，上述观点是与其吻合的。响应时间 τ_L 随车速的增加而降低，或许意味着在转向过程中，车速增加时会迫使驾驶人承受更多的工作负荷。

习题

9.1　尽管忽略了车辆的瞬态特性，但是其侧向位移对转向输入的响应基本上是一个二阶积分函数，并可描述为 $y(s)/\delta(s) = V^2/(ls^2)$。试证明：为保证车辆侧向运动稳定，驾驶人仅采用比例控制是不够的，有必要加一些微分控制动作。

9.2　9.3.3 小节中，横摆角速度响应函数近似由式(9.8)表示。试求在 10 ~ 100km/h 的速度范围内，一辆普通乘用车的一阶迟滞响应的时间常数。并求证在此车速范围中，该延迟时间比驾驶人的响应

时间变化显著。

9.3　在给定 h、τ_L、τ_r、l 和 V 的情况下，试用式(9.17)计算使驾驶人-车辆系统稳定的参数 L 的范围。

9.4　假定驾驶人模型参数为定值，用 Matlab-Simulink 模拟：当突然受到与例题4.3相同的侧风作用下，驾驶人-车辆系统的表现行为，其中采用的驾驶人模型参数是例题9.2的结果。

9.5　试阐述：除连续线性 PD 控制模型以外，还有哪些可能用于模拟驾驶人转向行为的驾驶人模型？

参考文献

[1]　S. Yamakawa,. An investigation of vehicle under – steer/over – steer characteristics with a driver steering control, JSAE Journal, Vol. 18, No. 11, 1964(In Japanese).

[2]　D. T. McRuer, A review of quasi-linear pilot models, IEEE Trans, On human factors in electronics, Vol. HFE-8, No. 3, 1969.

[3]　J. Ishio et al. , Vehicle handling quality evaluation through model based driver steering behavior, Vehcle System Dynamics, Vol. 46 supplement, 2008.

扩展阅读

[1]　A. Tustin, The nature of the human operators response in manual control and its implication for controller design, J. Instn. Elect. Engrs, 94, 190, 1947.

[2]　D. T. Mcruer, E. S. Krendel, The human operator as a servo system element, J. Franklin Inst. , 267, 381-403, 511-536, 1959.

[3]　J. R. ragazzini, "Engineering Aspects of Human Being as a Servo-Mechanism", Meeting of the American Psychological Associations, 1948.

[4]　G. A Jackson, Measuring human performance with a parameter tracking version of the cross-over model, NASA CR-910, 1967.

第 10 章　车辆的操纵品质

10.1　引言

前面我们重点研究了车辆本身的运动特性、车辆所表现的各种运动形式以及驾驶人操控下车辆的运动。这些内容的重要性体现在诸多方面，不仅包括对车辆运动特性的描述及进而得到的对车辆运动的理论预测和客观观察，而且还体现在对驾驶人评价操纵难易程度(即对车辆操纵质量的评估)方面。此外，这些研究内容的重要性还同时体现在客观和主观两个方面。

对普通机器而言，操作人作为第三方，能客观地观察及理论上预测该机器的性能和功能，从而客观地对其评价。而对飞机或车辆而言，其性能仅仅由驾驶人的直接操控得以发挥，因而对其可控性来说，飞行员或驾驶人个人的主观评级尤为重要。

本章将研究车辆的基本运动特性与驾驶人对操纵质量主观评级之间的关系。由于至今为止尚无可解析推导车辆可控性的理论方法，因而在此我们只对基于实际案例及经验的研究方法给予介绍。同时，还将介绍当车辆运动特性发生变化时，如何根据驾驶人的评价推断车辆的可控性。

10.2　车辆的可控性

如上所述，可解析表达车辆可控性的理论方法尚未建立。迄今为止，甚至还没有一套通用的方法，以用于分析驾驶人主观评价及量化表达车辆运动特性与其可控性评价之间的关系。因此，各种不同方法被研究者采用，且每一方法相应地适用于不同的具体情况。

相反，在飞机领域，作为定量表达飞行员对操纵稳定性主观评价

的方法，即飞行员评级法(Pilot Rating,以下写为 PR)被应用已久。几经改进后，现已成为飞机操纵稳定性的通用评价方法，在设计“易于操控的飞机”，即对飞机操控性改进方面，发挥了作用。

以 PR 为雏形，有人尝试通过驾驶人评级来度量对车辆可控性的主观评价。具体做法是：通过改变车辆的运动特性，然后进行实车试验，并由驾驶人给可控性进行评分。据此，系统地研究这些评分，以试图在一定程度上弄清车辆特性与其可控性之间的关系。由于车辆可控性最终体现于驾驶人个人的主观评价，因此这种方法应该是最实际、最直接的。然而，该方法毕竟易受给出评价的驾驶人个人差异所影响，因此所得结果的客观性、通用性较差。此外，如果总是用这样的方法，会为车辆运动学特性与可控性的理论关系推导带来困难。而且，当车辆运动特性发生新的改变时，其可控性也将难以预先推断。

另一种评价车辆可控性的方法是目标性能法。即：预先设定车辆的目标路径，然后进行实车试验来评价其可控性。例如，观察车辆如何在某速度下、在某时间段内准确无误地通过设定的试验路程。目标性能法的优点是结果客观，但问题包括如何设定目标路径、如何评价所得的结果、是否能与驾驶人的主观评价结果很好地对应起来。况且，推导车辆运动特性与可控性关系的理论研究也并非易事。

还有一种评价车辆可控性的方法，即测量驾驶人的生理反应，如驾驶人工作负荷的心律、能量代谢、通过皮肤电流测得的发汗量等。通过系统地改变车辆的运动特性，研究驾驶人的生理反应变化，以找出使车辆易于控制的车辆特性。然而，即使这种方法能获得客观的测量结果，但其数据本身易受各干扰因素的影响，且驾驶人生理反应与车辆可控性之间确定性的关系也不易建立。

以上介绍的是，由实验考察当车辆运动特性改变时，驾驶人对其可控性的评价方法。通过改变车辆运动特性，并研究车辆相应的可控性，有可能通过建立经验法则，在一定程度上找出车辆运动特性与其可控性之间的关系。还让我们知道：当车辆的运动特性发生改变时，如何预测车辆的操控性。

然而，即使迄今尚未建立起评价车辆可控性的一般性通用方法，但根据对上述研究方法的介绍，使得车辆运动特性与其可控性的关系

变得清晰起来，下面我们将对这些研究结果逐一介绍。

10.3 车辆的运动特性与可控性

10.3.1 转向特性与可控性

从第3章和第4章中，我们已经了解到：车辆的转向特性是影响车辆运动特性的一个重要因素。因此，我们首先来研究车辆的转向特性与其可控性之间的关系。

图10.1给出了具有不足转向(Under Steer, US)特性和过多转向(Over Steer, OS)特性的车辆，其转向盘转角修正量的频率分布图[1]。其中试验车是一辆普通轿车，其空气动力学中心与质心恰好重合。图中的实测数据是车辆在高速直线行驶中受到随机性侧风干扰时，驾驶人做出的转向盘转角修正量。由图可见，具有US特性的车辆转向盘转角较大，修正频率较低；而具有OS特性的车辆转向盘转角较小，但修正频率较高。原因是：车辆的不足转向程度越高，对于转向输入的运动响应就越小。相关内容可参见第4章，主要是4.2.3小节，并注意车辆在扰动作用下，由不同的转向特性引起的运动特性差异。

图10.2给出了驾驶人在相同试验中的心律记录。驾驶具有US特性车辆时驾驶人的心律为120次/min左右；而驾驶具有OS特性的

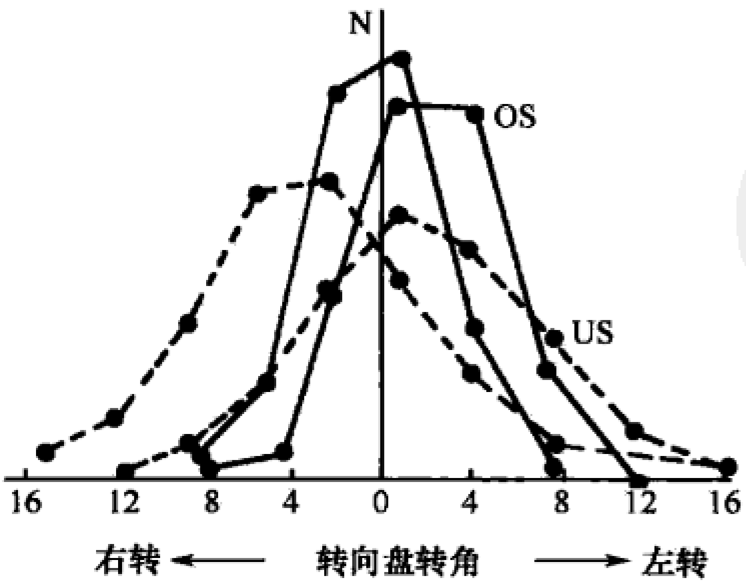


图10.1 车辆转向盘转角修正量的频率分布

车辆时，心律为 130 ~ 140 次/min 之间，意味着与驾驶 US 特性的车辆相比，驾驶人驾驶 OS 特性车辆的工作负荷会更大。

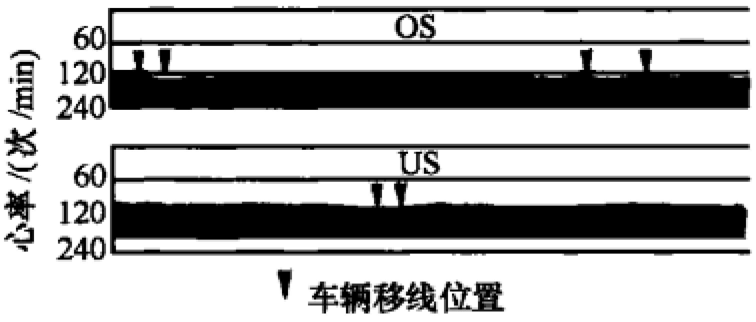


图 10.2　车速为 140km/h 时驾驶人的心律变化

根据以上分析可以推测，具有 US 特性的车辆比具有 OS 特性的车辆更易于控制。

稳定性因子 A 是表示车辆 US/OS 特性强弱的指标，其计算公式如下：

$$A = -\frac{m}{2l^2}\frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r} \tag{3.43''}$$

下面，我们举例说明稳定性因子 A 与微分控制动作之间的关系。首先测量车辆沿给定路径行驶时驾驶人的转向盘转角，然后计算出体现在驾驶人操控中的等效微分动作，并考察它与稳定性因子 A 之间的关系，结果如图 10.3 所示[2]。由于我们在第 9 章进行过阐述，微分

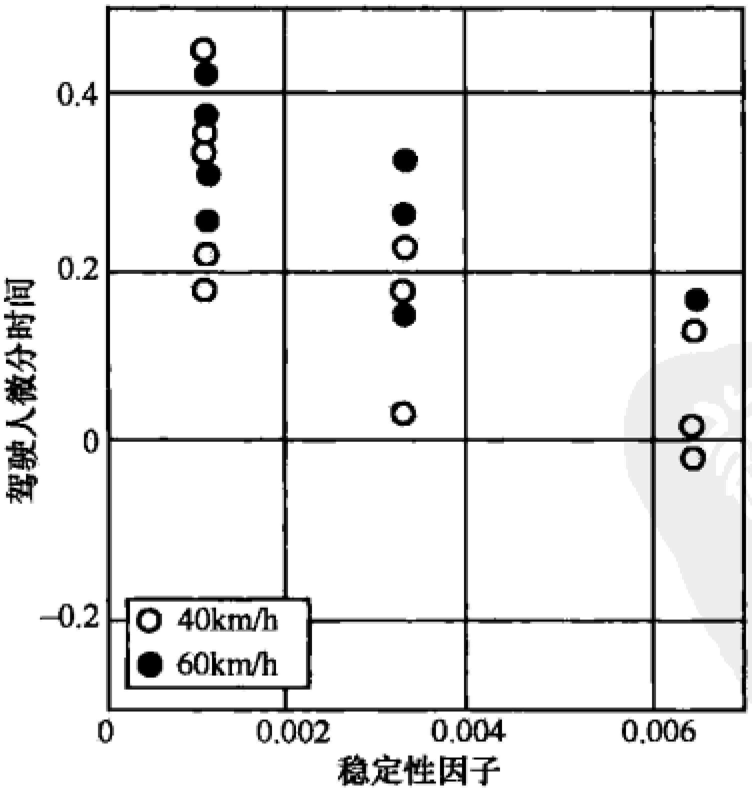


图 10.3　微分控制动作对稳定性因子 A 的影响

控制动作是导致驾驶人驾驶负荷的原因之一，那么我们或许可以这样认为，以较小的微分控制动作控制的车辆是更易于控制的。图 10.3 中的横坐标代表的是稳定性因子 A，其值为正，表示车辆具有 US 特性的程度，我们可以认为，该图反映了车辆的 US 特性与其可控性之间的关系。

仅由图 10.3 来看，似乎是车辆的 US 特性越强，车辆越易于控制。然而，仅仅关注操纵动作中所必需的微分动作，并不一定能判断车辆的可控性。此外，稳定性因数 A(或者稳定裕度,即 Stability Margin，简称 MS)等类似参数表示的是车辆转向特性，也是唯一直接影响车辆稳态特性的因素。但是，如果车辆的转向特性改变了，车辆所固有的动力学特性也会随之改变。而且，除了转向特性，还有其他因素会影响车辆的动力学特性。因此，仅靠车辆的转向特性就来判断其可控性未必合适，不能简单得出结论，说具有 US 特性的车辆更易于控制。

10.3.2 动力学特性与可控性

对一辆原本直线行驶的车辆，若突然给其转向盘一固定的转角然后松手，那么对一辆稳定的车辆而言，将在经历一些振动性的横摆运动后趋于稳态。这种情况下，决定车辆运动特性的指标之一是横摆阻尼，它受车辆的转向特性、转向系统特性及车身侧倾等方面的因素影响。伯格曼(Bergman)[3] 以 10 分评级制研究了横摆阻尼实测值与驾驶人主观评级结果之间的关系，如图 10.4 所示。由图或许可以认为，横摆阻尼越大的车辆更易于控制。

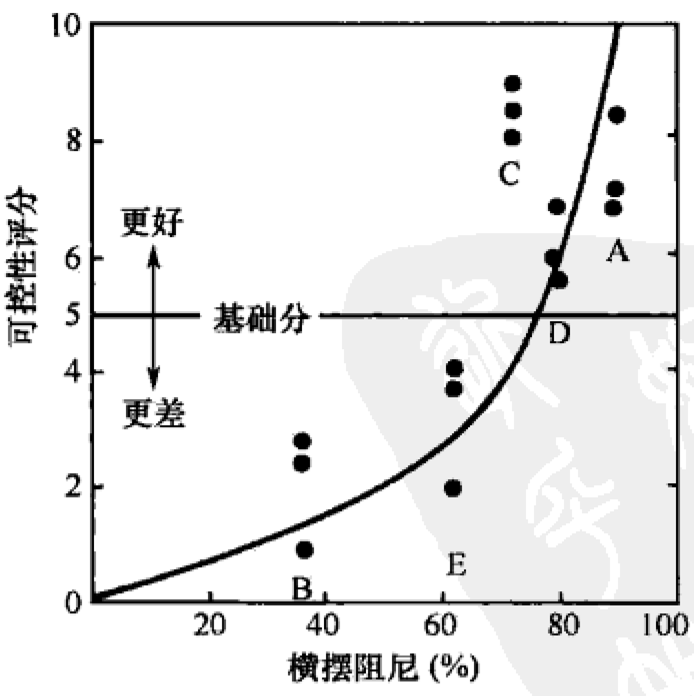


图 10.4 横摆阻尼与可控性的关系

图 10.5 给出的是对同一辆车，其可控性与不足转向率 U_R 之间的关系。由图可以清晰地看出，并非所有具有强 US 特性的车辆都易于控制。

如 3.4.3 小节所述，观察

车辆对周期转向的响应，成为研究车辆动力学特性的常见方法之一。尤其是驾驶人，他们对由转向操纵而引起的横摆角速度变化敏感，已有一些关于车辆可控性与相对于周期性转向输入的横摆角速度增益之间关系的研究实例。

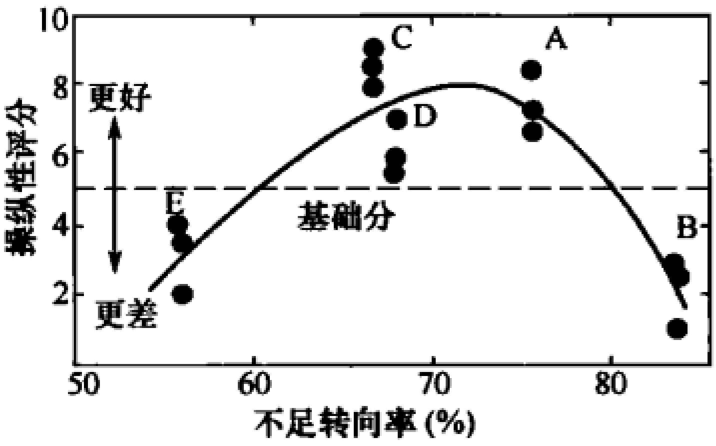


图 10.5　不足转向率与可控性的关系

当主导车辆动力学特性的参数发生改变时，横摆角速度增益曲线的形状也随之发生改变，如 3.4.3 小节中图 3.30 所示。山本(Sugimoto)[4]曾用增益峰值和低频增益(即f为 0.2Hz 时)的比值，即$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$来表示这样的增益曲线形状变化，如图 10.6 所示。通过对一些不同普通乘用车所测试的上述比值，来考察该比值与相应车辆可控性评级结果之间的关系。

研究结果如图 10.7 所示，由图可见，当$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$的比值在 1.2 附近时，可控性的评级最佳；当比值大于 1.2 时，车辆可控性变得很差，这是因为随着$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$比值增加至大于 1 后，车辆系统的阻尼则显得越加不够；相反，随着这个比值的下降直至小于 1，则滞后增大，响应速度变差。我们也可根据横摆角速度频率响应的相关常识，推断出这一结论。可见，比值$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$是与车辆可控性相关的一个重要的车辆运动特性指标。

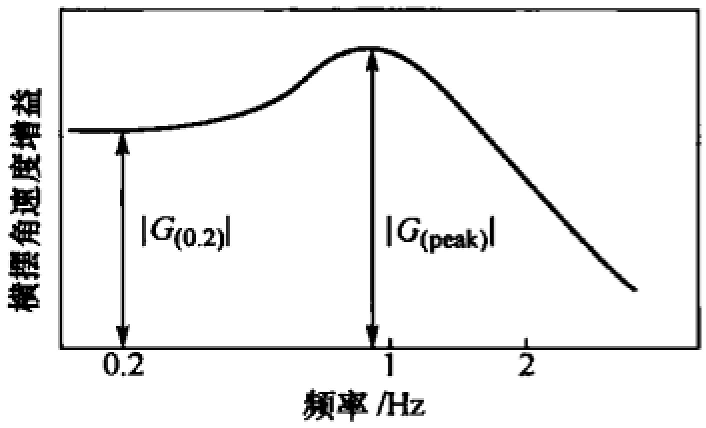


图 10.6　频响增益的比值

然而，随着车辆动力学参数的改变，也会有比值$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$甚至几乎不变，而其增益峰值的频率和高频区增益的下降速度以及相位延迟发生变化的情形。因此，我们不能认为车辆的可控性仅取决于比值$|G_{(peak)}|/|G_{(0.2)}|$(例如即使也可能在一个固定的工况下)，因而不

能仅由该增益比值来进行判断。

关于以上结论，林克(Lincke)[5]的研究结果就可以作为一个很好的例证。图 10.8 给出了四种具有不同动力学特性的车辆，其横摆角速度对周期转向输入的增益响应。林克以四分制驾驶人评级方法，对这四种车辆的可控性进行了评级，所设定的路径由图 10.9 所示，设定的车速为 60mile/h (1mile = 1.609km)，结果如图 10.10 所示。由图可以看出，车辆的可控性恰好与横摆角速度增益达到峰值的频率很好吻合，也就是说，在车辆运动的固有频率处达到很好的吻合。若我们将车辆 Q 和车辆 W 进行比较，车辆 W 的 $|G_{(peak)}|$ 值小，横摆阻尼大，但两车的固有频率一样，所得到的可控性评级几乎相同。再看车辆 T 和车辆 W，两车的横摆阻尼几乎相同，但车辆 T 的固有频率更小，于是其可控性评级不好。因此，在这种情况下，车辆的固有频率与横摆阻尼相比，与可控性关联度更大。

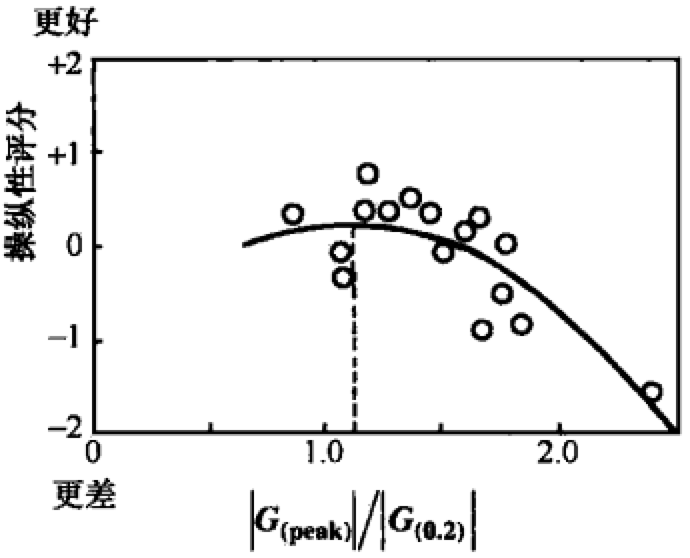


图 10.7　频响增益比值与可控性的关系

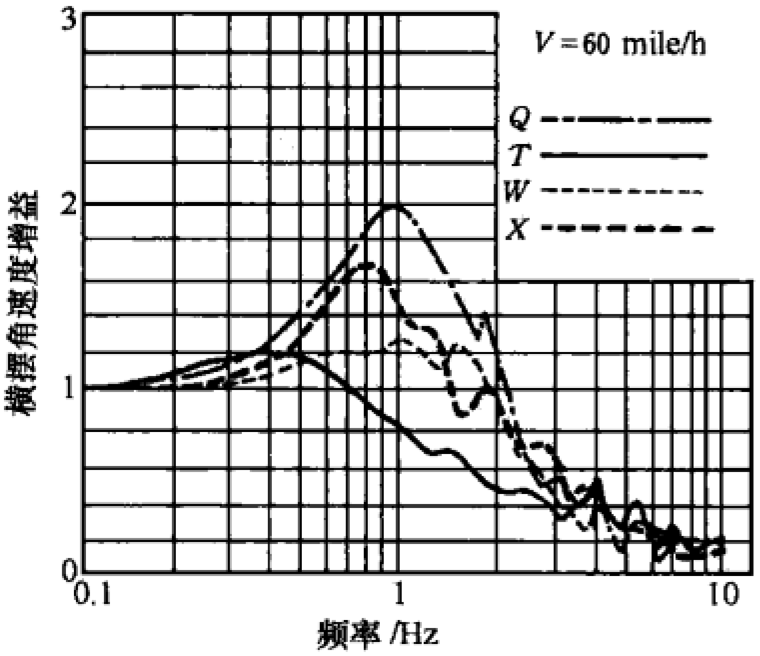


图 10.8　四种车辆的横摆角速度增益

如第 3 章中相同，我们以两自由度模型(即质心侧偏角 β 和横摆角速度 r)描述车辆的侧向运动，得到理论上的系统固有频率 ω_n 和阻尼比 ζ 近似表达如下：

$$\omega_n = \frac{2(K_f + K_r)}{mV}\sqrt{\frac{l_f l_r}{k^2}}\sqrt{1 + AV^2} \qquad (3.67'')$$

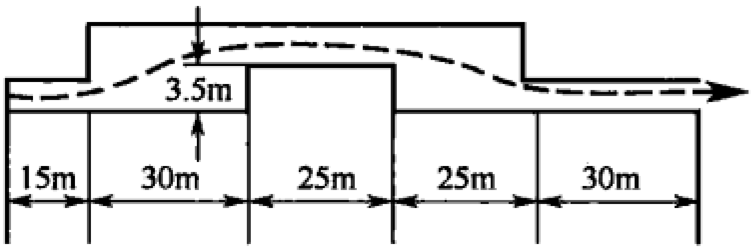


图 10.9　评价试验的路径

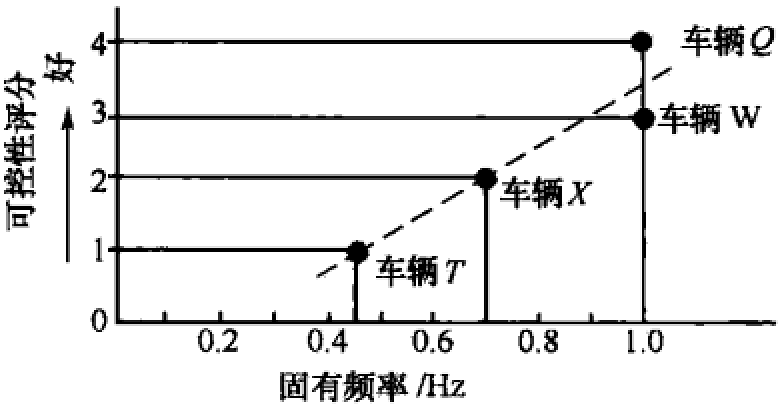


图 10.10　固有频率与可控性的关系

$$\zeta = \frac{1 + k^2/l_f l_r}{2\sqrt{k^2/l_f l_r}} \frac{1}{\sqrt{1 + AV^2}} \tag{3.68''}$$

需要强调的是，这里的固有频率 ω_n 表达成为与车辆可控性相关的一个重要特性。

但仅仅由图 10.4 和图 10.7 的例子，还不能就说阻尼比与车辆可控性无关。如前所述，不能认为车辆的可控性只取决于其固有频率而轻易地下结论说：具有更高固有频率的车辆其可控性更好。

通过车辆对转向输入的运动响应延迟，也可以考察车辆的动力学特性，也就是以响应时间来表达响应特性。前期通常采用的手动控制系统的研究表明，延迟大的控制对象往往较难控制。车辆对转向输入的横摆角速度响应由式(3.78″)给出。如果 $l_f \approx l_r$，$K_f \approx K_r$，则根据式(3.78)，可得如下近似表达：

$$\frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{G_\delta^r(s)}{1 + t_r s} \tag{3.78''}$$

其中，

$$t_r = \frac{mV}{2(K_f + K_r)}\left(\frac{k^2}{l_f l_r}\right) \tag{10.1}$$

霍夫曼(Hoffman)等人[6]测定了不同轿车的等效横摆角速度响应时间 t_r，并研究了这些车辆沿由圆锥路桩设定的路径行驶时的失误率(车辆碰到和撞到圆锥路桩均为失误)与响应时间的关系，结果如图10.11所示。由图可以看到，当响应时间在约0.2s时失误率最小，而大于此值时，失误率则急剧增大。可以推测，随着响应时间 t_r 的增大，车辆变得更加难以控制。

侧滑响应时间指的是，侧偏角 β 相对于横摆角速度 r 的响应延迟。如果 $l_f K_f \approx l_r K_r$，则当车辆转向角 δ 设定为零时，其侧偏角 β 对横摆角速度 r 的响应可根据式(3.12)表示为

$$mV\frac{d\beta}{dt}+2(K_f+K_r)\beta=-mVr \tag{3.12'}$$

因此，侧偏角响应时间 t_β 则表示为

$$t_\beta=\frac{mV}{2(K_f+K_r)} \tag{10.2}$$

伯格曼(Bergman)[7]测定了不同轿车的等效侧偏角响应时间 t_β，并基于10分评级制研究了响应时间 t_β 与车辆可控性相关的驾驶人评级之间的关系，研究结果如图10.12所示。

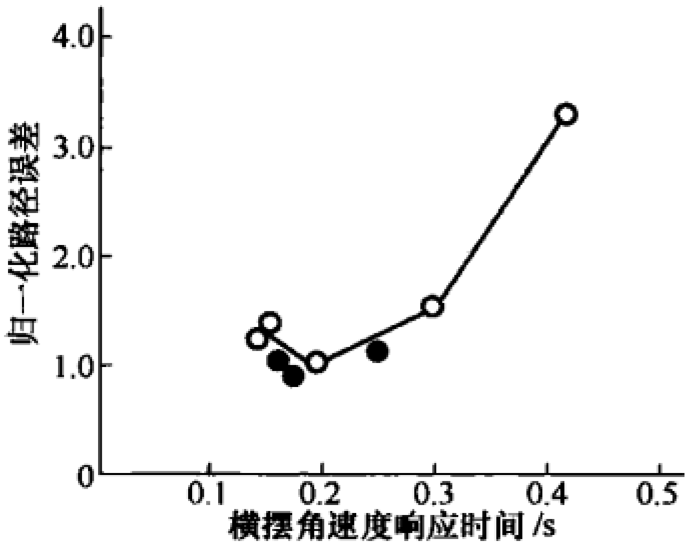


图10.11 路径失误率与横摆角速度响应时间的关系

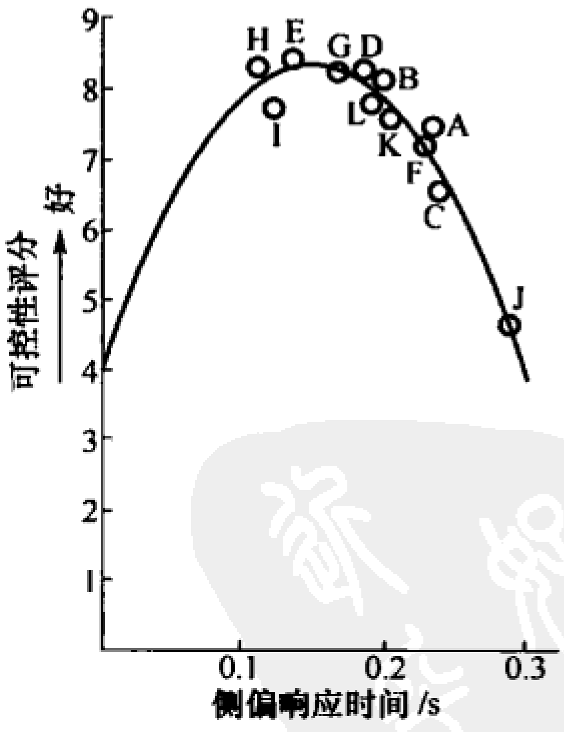


图10.12 侧偏响应时间与可控性的关系

结果表明，随着侧偏响应时间的增加，车辆变得更难以控制。

根据式（10.1）、式(10.2)、式(3.73)和式(3.74)，若 $k^2 \approx l_f l_r$，则 t_β 和 t_r 几乎相等，且与 3.4.1 小节第三部分中描述的响应时间 t_R 相等，即

$$t_r \approx t_\beta \approx t_R \approx \frac{mV}{2(K_f + K_r)} \tag{10.3}$$

这样，我们便理解了车辆运动的响应时间是用于表示车辆运动特性（它又影响着车辆的可控性）的一个重要指标，其大小主要取决于车辆前、后轮侧偏刚度，车辆的质量及行驶速度。

另外，如 3.4.2 小节描述的横摆角速度响应性也可写为如下形式：

$$t_p = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\left[\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n T_r}{1-\zeta\omega_n T_r}\right)\right] \tag{3.86}$$

林克 Lincke 等人[5]则在一个恒定转向角输入下，对应于单位侧向加速度响应的车辆侧偏角稳态值，即

$$\frac{G_\delta^\beta(0)}{G_\delta^{\ddot{y}}(0)} = \frac{l_r}{V^2}\left(1 - \frac{m}{2l}\frac{l_f}{l_r K_r}V^2\right)$$

与等效 t_p 值的乘积称为 TB 因数，即

$$\mathrm{TB} = t_p G_\delta^\beta(0) / G_\delta^{\ddot{y}}(0) \tag{10.4}$$

并给出了该值与车辆可控性的强的相关关系，如图 10.13 所示。

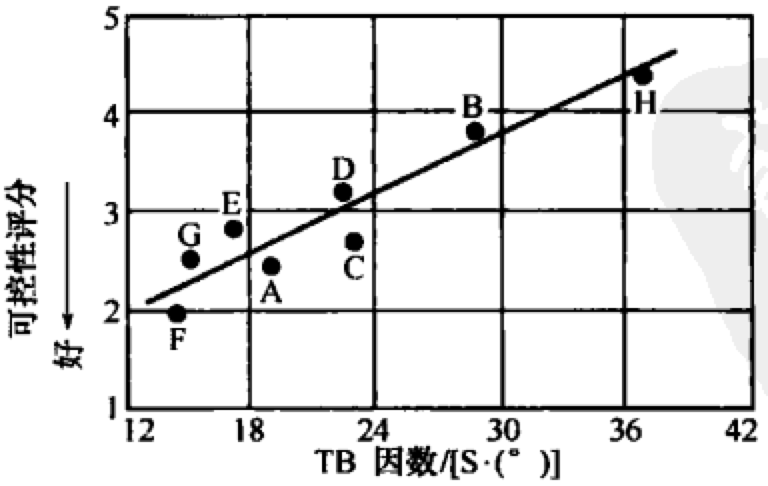


图 10.13　TB 因数与可控性的关系

由图10.13可见，当t_p和$G_\delta^\beta(0)$的值小时，横摆角速度响应性会好，此刻的侧偏小，车辆更易于控制。

10.3.3 响应时间和增益常数与可控性

如前所述，仅以车辆运动特性的表达来评价车辆的可控性是困难的。此外，驾驶人仅由某一特殊的运动特性来评价车辆的可控性，其有效性也无法保证。因此，仅仅基于某一运动特性来断定车辆的可控性并非总合适。

由式(3.78″)可知，对转向输入的车辆横摆角速度响应不仅取决于响应时间t_r，而且还取决于增益常数$G_\delta^\beta(0)$。对此，威尔(Weir)[8]等人对实际车辆的t_r和$G_\delta^\beta(0)$等效值进行了测量，并研究了这二者和车辆可控性之间的关系，结果如图10.14所示。由图可知，对易控制的车辆而言，其t_r和$G_\delta^\beta(0)$值在t_r-$G_\delta^\beta(0)$平面内占据了某个区域，其中以实线包围的区域被认为是熟练驾驶人的易操纵区，而以虚线包围的区域认为是普通驾驶人的易操纵区。通过这两个区域的对比可知，熟练驾驶人更偏好于$G_\delta^\beta(0)$值较大的区域，尽管此时的t_r值也有点大；而普通驾驶人更倾向于在t_r较小的区域，尽管此时的$G_\delta^\beta(0)$值也相对较小。但对两类的驾驶人而言，$G_\delta^\beta(0)$值的上限几乎相同，都同样精确地趋向于车辆中性转向(NS)点。

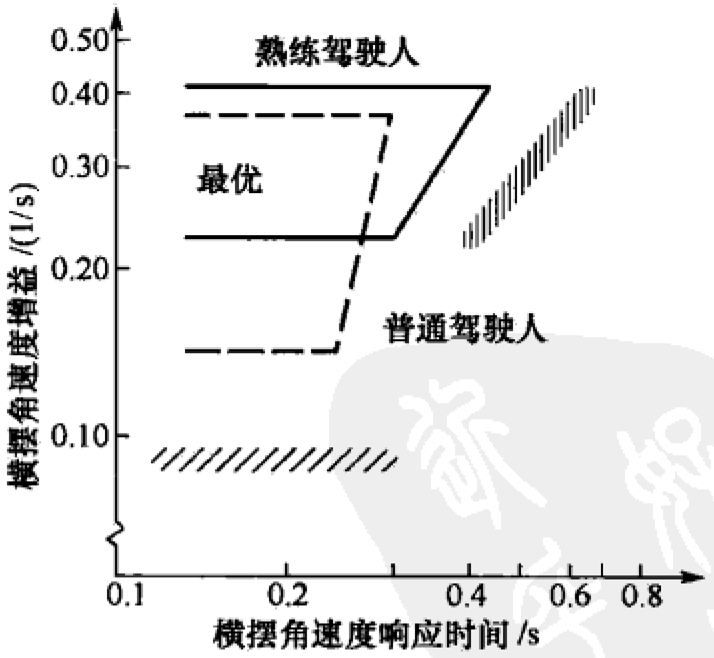


图10.14 横摆角速度增益和响应时间与可控性的关系

上面的例子重点关注的是车辆横摆角速度对转向输入的响应。而伯格曼(Bergman)[7]则关注于车辆的侧向运动，并试图研究车辆侧向加速度增益常数$G_\delta^{\ddot{y}}(0)$和侧偏角响应时间t_β与可控性之间的关系。

由式(10.3)可以发现，t_β 和 t_r 是具有大致相同特性的两个值。$G^r_\delta(0)$表示为

$$G^r_\delta(0)=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V}{l} \tag{3.81'}$$

而 $G^{\ddot{y}}_\delta(0)$为

$$G^{\ddot{y}}_\delta(0)=\frac{1}{1+AV^2}\frac{V^2}{l} \tag{3.89'}$$

由此可以看出，$G^{\ddot{y}}_\delta(0)$和 $G^r_\delta(0)$也具有相同的特性。接下来的结论是：可以认为 t_β 和 $G^{\ddot{y}}_\delta(0)$的组合与 t_r 和 $G^r_\delta(0)$的组合是相同的。

伯格曼(Bergman)对若干车辆测量了其有效 t_β 值和 $G^{\ddot{y}}_\delta(0)$值，并以 10 分评级制对相应车辆的可控性进行了评级。然后，研究了这两个量与车辆可控性的关系，结果如图 10.15 所示。由图可知，对易控制的车辆而言，在 t_β-$G^{\ddot{y}}_\delta(0)$平面内，其 t_β 和 $G^{\ddot{y}}_\delta(0)$占据的某特定区域与图 10.14 所示的依然相同。另外可以看出，与 $G^{\ddot{y}}_\delta(0)$相比，其 t_β 值的变化对车辆可控性具有更重要的影响。也就是说，相比于侧向加速度增益常数，作为车辆运动特性的侧偏响应时间对车辆可控性的敏感程度更高。

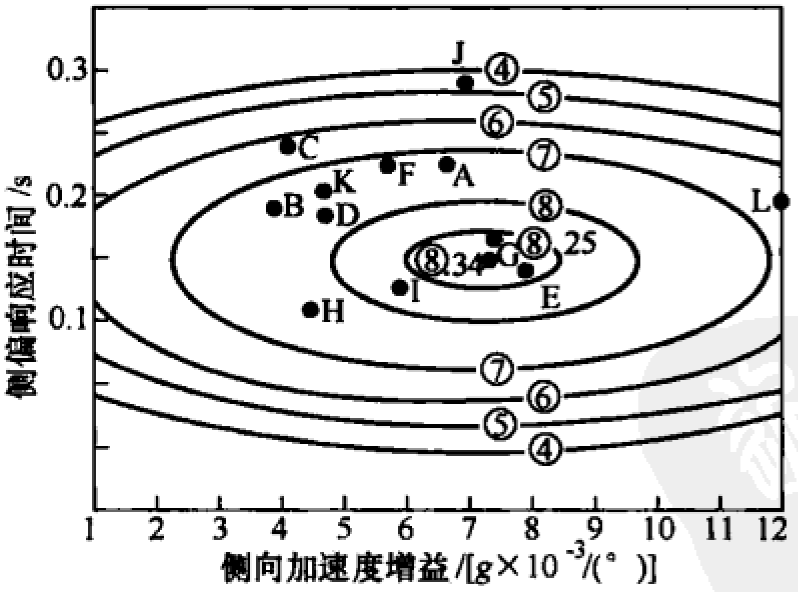


图 10.15　侧向加速度增益和侧偏响应时间与可控性的关系

如上所述，通过考察车辆可控性以及两个反映车辆运动特性的参数，可以较好地理解车辆可控性与车辆运动特性之间的关系。在所给

出的示例中，尽管我们选择了响应时间和稳态增益，但对如何表达车辆可控性这个问题，还无法在理论上保证应该考虑哪两个车辆运动特性。因此，当主导车辆运动特性的参数发生变化(或给出新车型的性能指标)时，即使其 t_r-$G_\delta^r(0)$ 或 t_β-$G_\delta^{\ddot{y}}(0)$ 处在示例中所示的区域内，也不能轻言它就是易控的。

除了要考虑车辆的可控性外，许多其他功能要求也要满足。当其他要求的优先度更高时，车辆可控性的受重视程度便会减少。尽管该问题属于本书中的车辆动力学研究内容，但理论上还是没有提出对车辆可控性的一般性通用评价方法。

到目前为止，仍然尚无如飞机的飞行员评级法(PR)那样精确、全面的通用方法，以用于量化测量实际驾驶人对车辆操纵品质的评价。目前实际中得到的车辆可控性评价缺乏精确性及广泛性。因此，仅从理论上考察车辆运动特性与车辆可控性的关系尚不充分，在试图为驾驶人实车评价建立可控性实测方法的同时，迫切需要可控性研究方面理论上的进展。

10.4　基于驾驶人模型的车辆操纵品质评价的可行性

正如前面所述，目前为止还没有建立起来这样一种方法，能够以此依据车辆操纵特性来预估驾驶人操纵品质。然而，正如第9章的讨论得知，在转弯过程中，驾驶人会自适应于车辆不同的特性，从而改变他(她)自身的参数，由此可以认为，驾驶人参数可以反映车辆的操纵特性。因此，我们可以设想：是否有可能基于驾驶人转向模型，通过考察驾驶人对车辆的自适应行为，来评价操纵品质。

由此看来，9.4小节介绍的交叉模型应该对车辆操纵品质评价适用。但该模型尚未(当然也不是非得)在理论上成功地应用于研究操纵品质评估与特定车辆操纵特性参数之间的关系。原因恐怕是，交叉模型本身就是针对飞行员-飞机系统分析而开发的工具，对与特定的路-车操纵特性相关的人-车系统中特定的驾驶人模型而言，通用性地评估并确定其操纵特性参数，交叉模型未必

够用。一个似乎有效的方法[9]或许可能取而代之，即采用 9.5 小节描述的、由驾驶人基于实验数据的驾驶人模型参数辨识，来对车辆操纵性评价进行分析和预测。

在移线试验中，若假定采用如同式(9.21)所描述的驾驶人模型，则参数 h 和 τ_L 代表的是驾驶人的响应性。如果车辆静态(Stationary)增益小，则需要驾驶人增加 h 值以补偿这个较小的静态增益。如果车辆是在动态响应中，较大的 τ_L 利于驾驶人控制车辆。而且，时间常数值 τ_L 越大，驾驶人在他(或她)期待的转弯中会越轻松。微分时间 τ_h 表示驾驶人所采取的微分控制程度，以使不够稳定的车辆稳定；或表示驾驶人对较大 τ_L 值的响应延迟所进行的补偿程度。对驾驶人来讲，要求的微分时间越小，驾驶人感觉驾驶车辆越容易。

基于上述观点，对移线实验中的某款具体车辆而言，一旦得到驾驶人模型的辨识参数，就可利用这些辨识的参数，推导出将由驾驶人来评价的车辆操纵品质。

图 10.16 和图 10.17 分别给出了试车场移线试验中，不同驾驶人的人-车系统表现行为的时域结果。试验车辆为两类，分别为带主动侧偏控制(DYC)和不带主动侧偏控制的车辆。这里的 DYC 是控制轮胎的纵向力，即使车辆已经进入了轮胎非线性区内，仍然给车辆提供尽可能大(等同于线性轮胎模型所能产生)的横摆力矩，以使其保持稳定。尽管驾驶人能感觉到带有 DYC 的车辆易控制，从而给其一个较好的主观评价，但从这两种车的实测的时域结果中，却看不出有什么明显差异，这也与驾驶人所给出的观点相吻合。

从另一方面看，若同样按照 9.5 小节所描述的方法进行移线试验，从人-车系统的时域结果中可以发现，辨识的驾驶人模型参数差异很大。图 10.18 和图 10.19 分别给出了针对驾驶人 A 和驾驶人 B 的参数辨识结果。由图发现，与不带 DYC 的车辆相比，装有 DYC 的车辆允许驾驶人有较大的时间延迟 τ_L 以及较小的微分时间值 τ_h，该结果可以很好地支持了试验中驾驶人对车辆操纵品质给出的主观评价结果[10]。

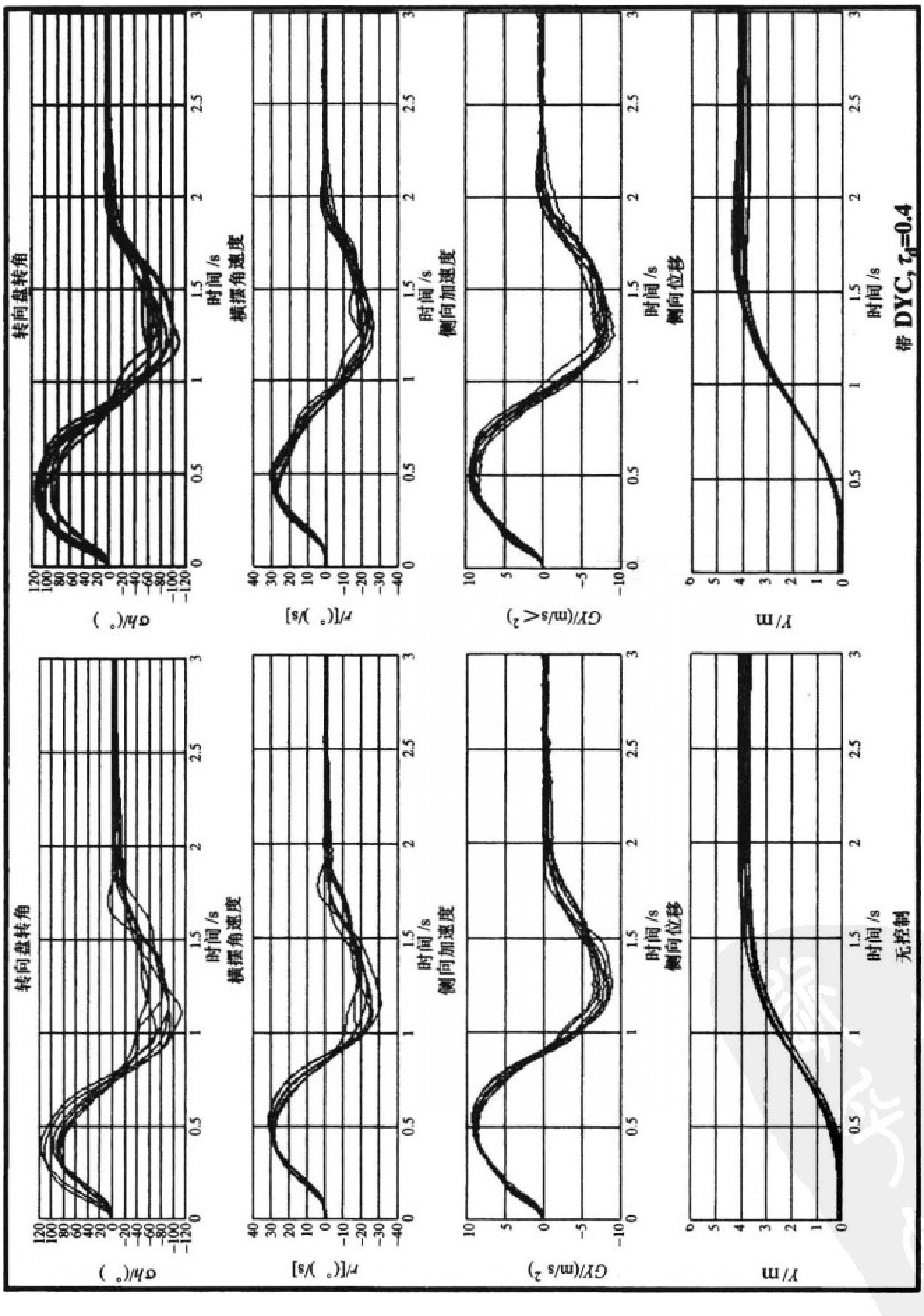


图 10.16 驾驶人 A 在移线试验中车辆的响应

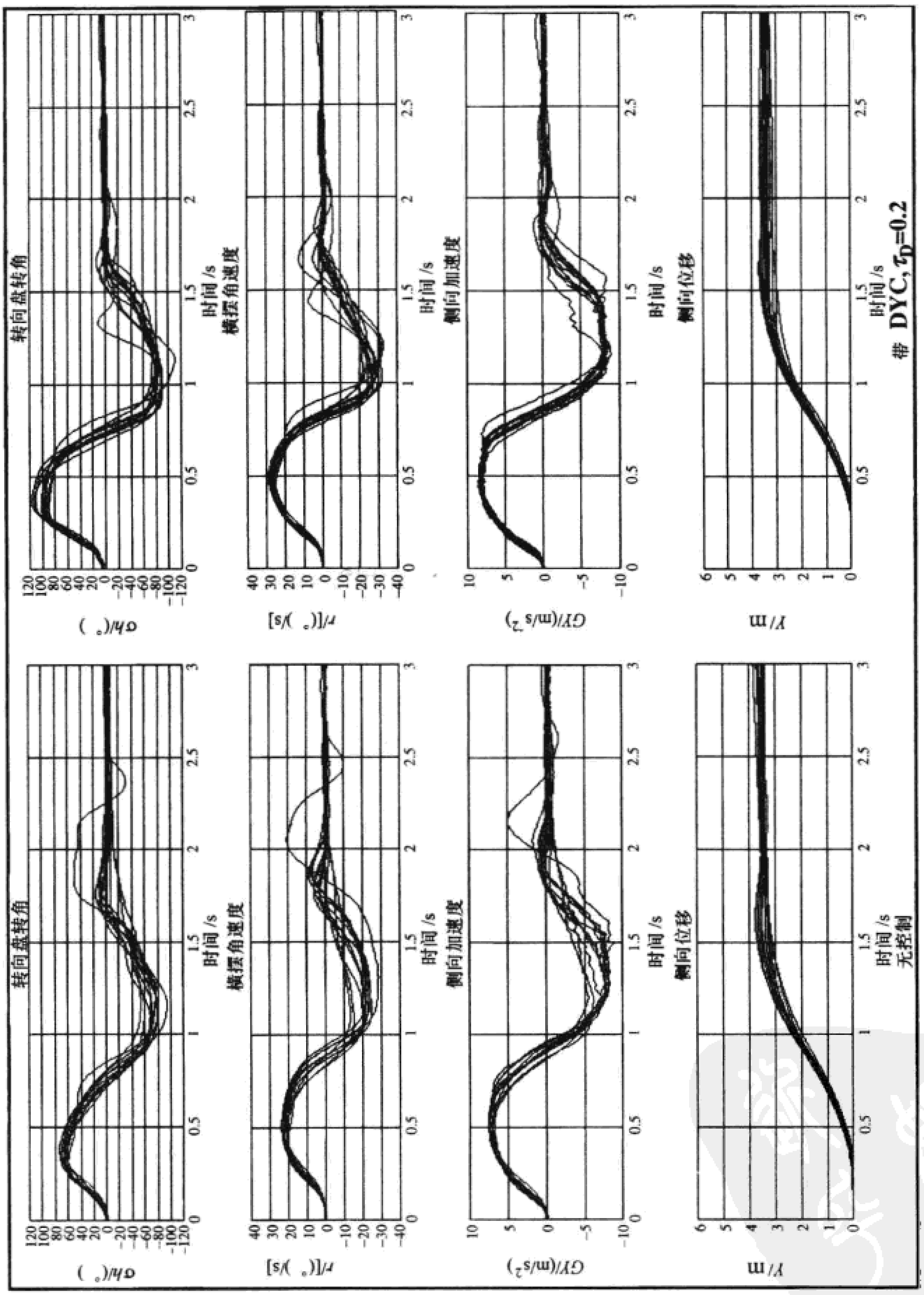


图 10.17 驾驶人 B 在移线试验中车辆的响应

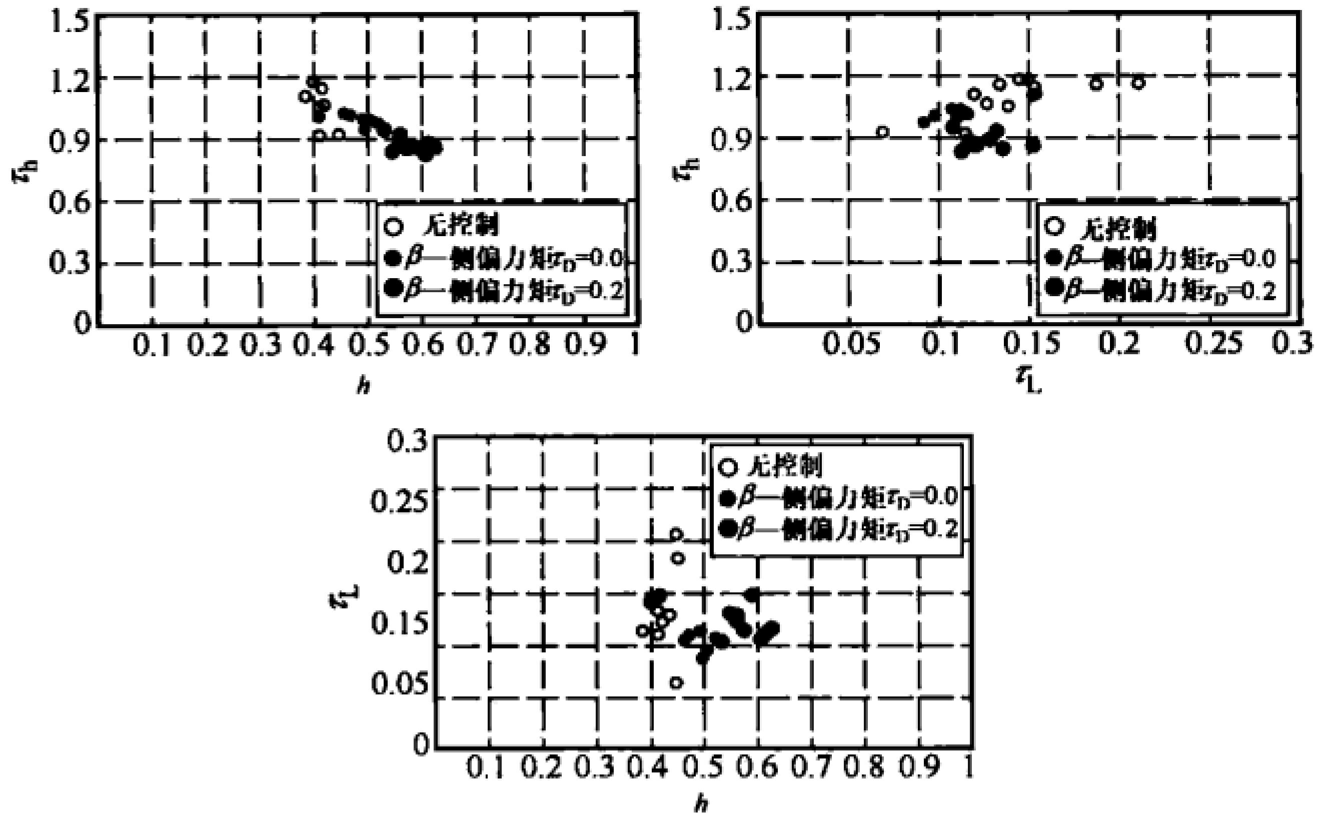


图 10.18　对驾驶人 A 所辨识的操纵参数

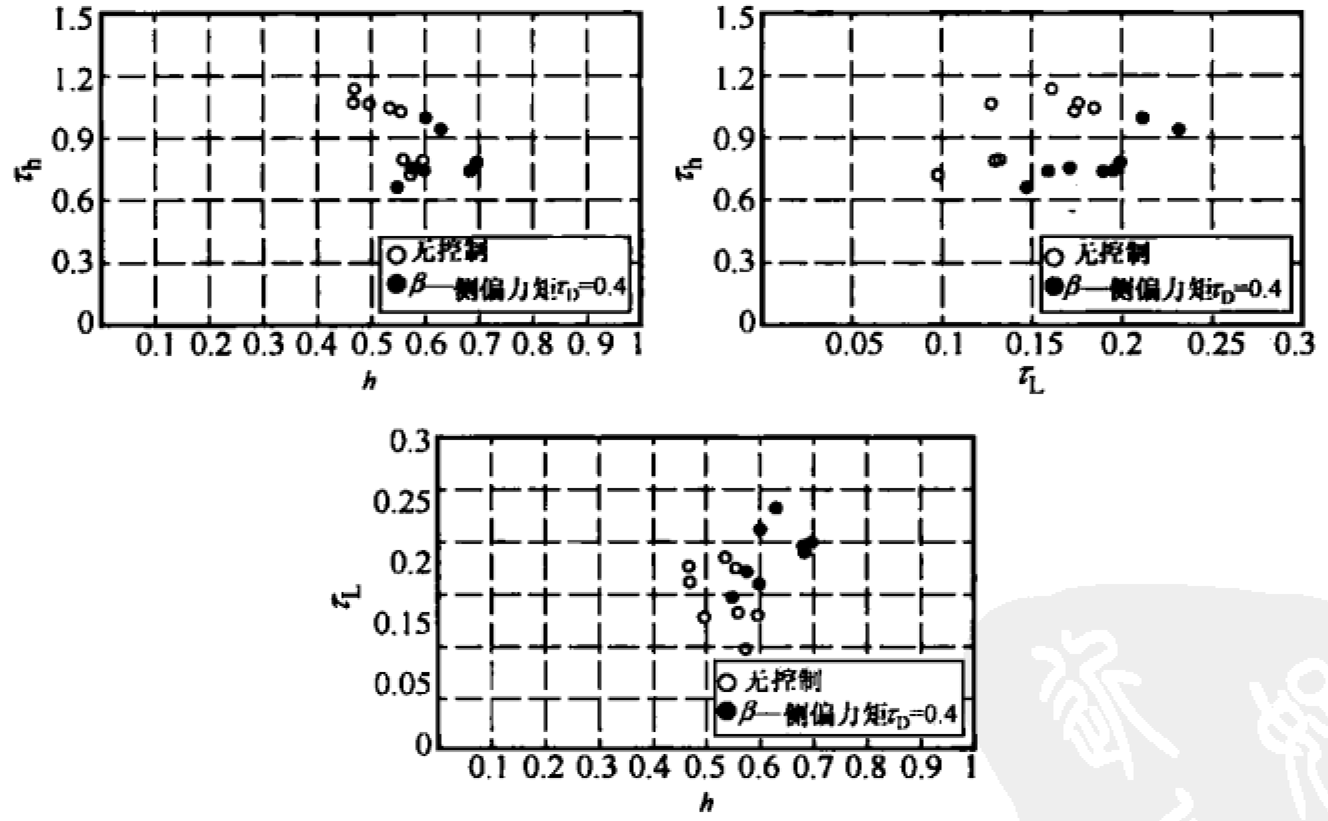


图 10.19　对驾驶人 B 所辨识的操纵参数

参考文献

[1] T. Nakatsuka, Vehicle safety in high speed driving and human characteristics, The Japanese Journal of Ergonomics, Vol. 4, No. 4, 1968 (In Japanese).

[2] Y. Saito, et al. , Effects of US and OS characteristics on driver handing behavior, JARI Report, No. 4, 1971 (In Japanese).

[3] W. Bergman, Bergman gives new meaning to understeer and oversteer, SAE Journal, Vol. 73, No. 12, 1965.

[4] Sugimoto et al. , Analysis on vehicle running stability subjected to side wind on high way, Proceedings of Annual Meeting of JASE, No. 761, 1976 (In Japanese).

[5] W. Linke et al. , Simulation and measurement of driver vehicle handling performance, SAE Paper 730489.

[6] E. R. Hoffman et. , The effect of change in some vehicle handling variable on driver steering performance, human factors, June, 1996.

[7] W. Bergman, Relationships of certain vehicle handling parameters to subjective ratings of ease of vehicle control, Proceedings of the 16th FISITA Congress, Tokyo, May, 1976.

[8] D. H. Weir et al. , Correlation and evaluation of driver/vehicle directional handling data, SAE Paper 780010.

[9] J. Ishio et al, . Vehicle handling quality evaluation through model based driver steering behavior, Vehicle system Dynamics, Vol. , No. , 2008.

[10] M. Abe et al. , A study on vehicle handling evaluation by model based driver steering behavior, Proceedings of FISITA 2008, Munich, September 2008, in CD.